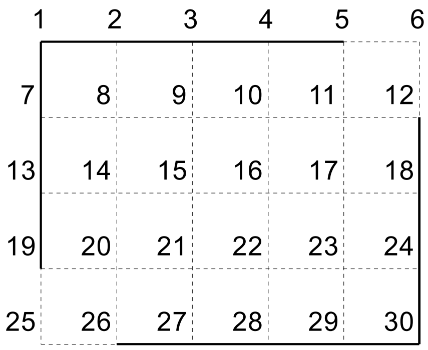
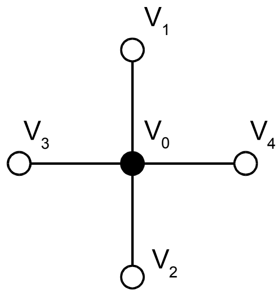
Méthode de relaxation

On considère le condensateur plan suivant avec le maillage suivant :





Avec l'équation établie en cours on a pour une maille : $4V_0 = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$

Le potentiel des mailles 1 à 5, 7,13, 19 est fixé à 1.
Le potentiel des mailles 26 à 30, 24, 18 est fixé à -1.

On peut alors écrire les équations en chaque maille :

$4V_8 = 1+1+V_{14}+V_9 = 2+V_{14}+V_9 \;\rightarrow\; 4V_8 - V_{14} - V_9 = 2$

$4V_9 = 1+V_8+V_{15}+V_{10} \;\rightarrow\; 4V_9 - V_8 - V_{15} - V_{10} = 1$

$4V_{10} = 1+V_9+V_{16}+V_{11} \;\rightarrow\; 4V_{10} - V_9 - V_{16} - V_{11} = 1$

$4V_{11} = 1+V_{10}+V_{17}-1 \;\rightarrow\; 4V_{11} - V_{10} - V_{17} = 0$

$4V_{14} = 1+V_8+V_{20}+V_{15} \;\rightarrow\; 4V_{14} - V_8 - V_{20} - V_{15} = 1$

$4V_{15} = V_9+V_{14}+V_{21}+V_{16} \;\rightarrow\; 4V_{15} - V_{14} - V_9 - V_{21} - V_{16} = 0$

$4V_{16} = V_{10}+V_{15}+V_{22}+V_{17} \;\rightarrow\; 4V_{16} - V_{10} - V_{15} - V_{22} - V_{17} = 0$

$4V_{17} = V_{11}+V_{16}+V_{23}-1 \;\rightarrow\; 4V_{17} - V_{11} - V_{16} - V_{23} = -1$

$4V_{20} = V_{14}+1+-1+V_{21} \;\rightarrow\; 4V_{20} - V_{14} - V_{21} = 0$

$4V_{21} = V_{15}+V_{20}-1+V_{22} \;\rightarrow\; 4V_{21} - V_{15} - V_{20} - V_{22} = -1$

$4V_{22} = V_{16}+V_{21}-1+V_{23} \;\rightarrow\; 4V_{22} - V_{16} - V_{21} - V_{23} = -1$

$4V_{23} = V_{17}+V_{22}-1-1 \;\rightarrow\; 4V_{23} - V_{17} - V_{22} = -2$

Il s'agit d'un système de 12 équations linéaires à 12 inconnues qui peut s'écrire sous forme matricielle :

$$
\begin{bmatrix}
4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
V_8 \\ V_9 \\ V_{10} \\ V_{11} \\ V_{14} \\ V_{15} \\ V_{16} \\ V_{17} \\ V_{20} \\ V_{21} \\ V_{22} \\ V_{23}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -2
\end{bmatrix}
$$

On peut traiter ce système par une méthode itérative, les pivots valent tous 4 et l'on a bien :
$|pivot| \geq \sum |autres\ termes|$

Résultats :

Méthode de Jacobi

```
Iteration 1
 0.50000       0.25000       0.25000       0.00000
 0.25000       0.00000       0.00000      -0.25000
 0.00000      -0.25000      -0.25000      -0.50000

Iteration 5
 0.74902       0.54785       0.35059      -0.02832
 0.46680       0.13379      -0.13379      -0.46680
 0.02832      -0.35059      -0.54785      -0.74902

Iteration 10
 0.76073       0.56238       0.34660      -0.03353
 0.48387       0.13865      -0.13865      -0.48387
 0.03353      -0.34660      -0.56238      -0.76073

Iteration 15
 0.76156       0.56192       0.34717      -0.03429
 0.48373       0.13998      -0.13998      -0.48373
 0.03429      -0.34717      -0.56192      -0.76156

 Iteration 22
 0.76147       0.56209       0.34700      -0.03420
 0.48389       0.13976      -0.13976      -0.48389
 0.03420      -0.34700      -0.56209      -0.76147
```

Méthode de Gauss-Seidel

```
 Iteration 1
 0.50000       0.37500       0.34375       0.08594
 0.37500       0.18750       0.13281      -0.19531
 0.09375      -0.17969      -0.26172      -0.61426

Iteration 5
 0.78469       0.59690       0.37620      -0.02011
 0.51237       0.17879      -0.10845      -0.46894
 0.05050      -0.32572      -0.54534      -0.75357

 Iteration 10
 0.76340       0.56443       0.34881      -0.03337
 0.48593       0.14231      -0.13787      -0.48297
 0.03532      -0.34566      -0.56104      -0.76100

 Iteration 16
 0.76156       0.56216       0.34708      -0.03418
 0.48395       0.13988      -0.13972      -0.48384
 0.03425      -0.34697      -0.56204      -0.76147
```