# Licence STS

# mention Electronique, Electrotechnique, Automatique,

# parcours Fondamental

## Support de cours

## &

## Travaux Dirigés d'Outils pour l'E.E.A.

P. Dubouix / P. Castelan / N. Sewraj

Rev 1.2

# Eléments simples de calcul sur les matrices carrées.

## Matrice carrée.

Une matrice A est un tableau composé de lignes et de colonnes. La matrice est carrée si le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes. Dans la suite les matrices seront toutes supposées carrées

Un élément de la matrice est noté $a^i_j$ où i désigne le numéro de la ligne et j le numéro de la colonne.

Les lignes sont numérotées du haut vers le bas et les colonnes de la gauche vers la droite comme dans un tableur.

On dira que la matrice est de dimension n si le nombre de lignes et donc de colonnes est égal à n et la matrice pourra être notée A(n,n).

Généralement en électricité les éléments $a^i_j$ sont des réels ou des complexes. Dans les exemples les éléments seront des réels.

**Exemple :** une matrice A(3,3) sera notée : $A(3,3)=\begin{bmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{bmatrix}$

➔ Bien remarquer que la matrice A est entourée par des crochets droits : [ ]

## Déterminant d'une matrice A(2,2)

Une telle matrice s'écrit de façon générale $A(2,2)=\begin{bmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{bmatrix}$

Son déterminant noté dét(A) ou $\begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{vmatrix}$ est le nombre $a^1_1 a^2_2 - a^1_2 a^2_1$

➔ Bien remarquer que le déterminant associé à A est noté en utilisant des barres verticales $\left| \ \right|$

## Déterminant d'une matrice A(3,3)

Le principe de calcul d'un déterminant est de se ramener au calcul d'un déterminant de dimension inférieure. Pour calculer le déterminant d'une matrice (3,3) on se ramène au calcul de déterminants de dimension 2 . Pour cela nous devons introduire quelques définitions.

### *Signature :*

on appelle signature du terme $a^i_j$ le nombre $s^i_j=(-1)^{i+j}$

➔ Bien remarquer qu'une signature ne peut prendre que les valeurs +1 et -1

***Mineur :***

on appelle mineur associé au terme $a_j^i$ le déterminant $\Delta_j^i$ de la matrice obtenue à partir de A en supprimant la ligne i et la colonne j.

Par exemple le mineur $\Delta_3^1$ de $a_3^1$ dans la matrice A(3,3) précédente est obtenu en supprimant la ligne 1 et la colonne 3

est donc : $\Delta_3^1 = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 \\ a_1^3 & a_2^3 \end{vmatrix} = a_1^2 a_2^3 - a_2^2 a_1^3$

➔ **Remarque :** on appelle cofacteur le produit de la signature par le mineur.

***Rangée :***

on désigne par rangée une ligne ou une colonne d'une matrice.

## Déterminant d'une matrice A(3,3)

On calcule le déterminant d'une matrice A(3,3) de la façon suivante :

- On choisit une rangée (*a priori* arbitrairement)
- On calcule la signature et le mineur de chacun des termes de la rangée
- On calcule les nombres $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ obtenus par : $\delta_k$ = (terme numéro k)*(sa signature)*(son mineur) successivement pour k=1, puis 2 et enfin 3.
- On obtient le déterminant par la somme $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3$

## Déterminant d'une matrice A(n,n)

Le même procédé de calcul s'applique aux déterminants de dimension quelconque. Par exemple pour un déterminant de dimension 4 on se ramène aux calculs de 4 déterminants de dimension 3.

## Propriété de multi-linéarité.

Un déterminant est une "forme multi-linéaire alternée". Ce résultat a des conséquences intéressantes pour le calcul des déterminants.

La multi-linéarité implique que la valeur du déterminant ne change pas si on ajoute ou retranche à une ligne une combinaison linéaire d'autres lignes. Le résultat est le même pour les colonnes. L'intérêt est de faire apparaître des zéros dans une rangée, ce qui facilite le calcul du déterminant.

Le fait que la forme soit alternée impliquera que la permutation de deux lignes ou de deux colonnes changera le signe du déterminant. Ce résultat est peu utile pour le calcul d'un déterminant.

Un autre résultat très intéressant lié à la multi-linéarité est qu'un déterminant est nul si deux rangées sont proportionnelles (ou que l'une apparaît comme une combinaison linéaire des autres).

Rappelons le sens de "**combinaison linéaire de lignes ou de colonnes"**. Si on note $l_1, l_2, l_3$ les lignes d'une matrice A(3,3), on appellera $\alpha l_1 + \beta l_2 + \gamma l_3$ une combinaison linéaire de lignes, les quantités $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ sont des constantes.

La définition est la même pour les colonnes.

***Exemple d'application :***

On veut calculer $dét(A)=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}$.

On constate la présence d'un zéro dans la ligne 1, l'idée est d'en faire apparaître un autre dans la même ligne, il suffit pour cela d'ajouter à la troisième colonne la première et on obtient alors : $\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}$

si on développe le déterminant par rapport à la première ligne on trouve facilement que : $dét(A)=\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 3\end{vmatrix}=6$

On aurait pu aussi ajouter la ligne 3 à la première et développer par rapport à la première ligne, ou encore ajouter la ligne 3 à la ligne 2 et développer par rapport à la deuxième colonne.

## Systèmes linéaires.

On appelle système linéaire d'ordre n, un système de n équations linéaires à n inconnues.

Un système linéaire d'ordre 3 par exemple sera de forme :
$$\begin{aligned} a_1^1x^1+a_2^1x^2+a_3^1x^3&=b^1\\ a_1^2x^1+a_2^2x^2+a_3^2x^3&=b^2\\ a_1^3x^1+a_2^3x^2+a_3^3x^3&=b^3\end{aligned}$$

Les quantités $x^1$, $x^2$, $x^3$ sont les inconnues à déterminer. Les quantités $b^1$, $b^2$, $b^3$ sont les seconds membres. Les termes $a_j^i$ et $b^1$, $b^2$, $b^3$ sont des quantités connues.

En introduisant la matrice $A=\begin{bmatrix}a_1^1 & a_2^1 & a_3^1\\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2\\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3\end{bmatrix}$, le vecteur des inconnues $\begin{bmatrix}x^1\\ x^2\\ x^3\end{bmatrix}$ et le vecteur second membre $\begin{bmatrix}b^1\\ b^2\\ b^3\end{bmatrix}$,

le système linéaire s'écrit sous la forme matricielle : $\begin{bmatrix}a_1^1 & a_2^1 & a_3^1\\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2\\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x^1\\ x^2\\ x^3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b^1\\ b^2\\ b^3\end{bmatrix}$

➔ **N.B.** La solution d'un système linéaire de matrice A(n,n) ne peut exister que si le déterminant de A est différent de zéro.

Différentes méthodes de résolutions d'un système linéaire sont possibles, la plus courante passe par le calcul de la matrice inverse de A, elle sera également exposée ultérieurement.

En électricité on utilise très souvent la méthode de CRAMER, car outre sa facilité d'exécution elle présente l'avantage de permettre le calcul d'une inconnue sans nécessiter le calcul des autres.

## Méthode de CRAMER.

La méthode est générale, en revanche pour expliquer son principe nous allons nous appuyer sur l'exemple précédent.

On note $\Delta_{sys}$ le déterminant de la matrice A associé au système.

Pour calculer la première inconnue on remplace dans la matrice A la première colonne par le vecteur second membre et on calcule le déterminant $\Delta_{x1}$ correspondant.

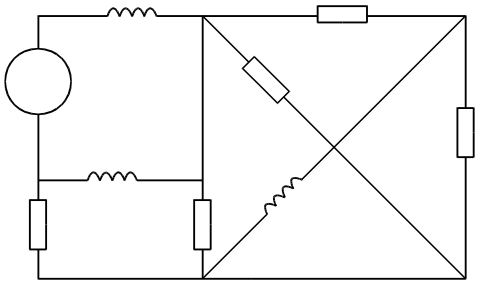
On a donc : $\Delta_{x1}=\begin{vmatrix} b_1 & a_2^1 & a_3^1 \\ b_2 & a_2^2 & a_3^2 \\ b_3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix}$

On fait de même pour toutes les inconnues et on obtient ainsi $\Delta_{x2}$ en remplaçant la deuxième colonne par le vecteur second membre et $\Delta_{x3}$ en remplaçant la troisième colonne.

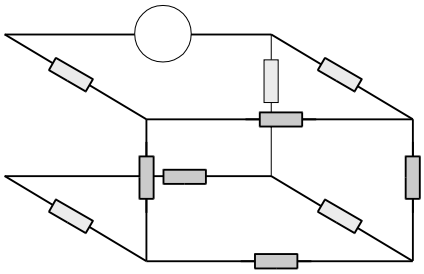
On obtient alors la valeur des inconnues par : $x_1=\frac{\Delta_{x1}}{\Delta_{sys}} ; x_2=\frac{\Delta_{x2}}{\Delta_{sys}} ; x_3=\frac{\Delta_{x3}}{\Delta_{sys}}$

## Exercice Préliminaire :

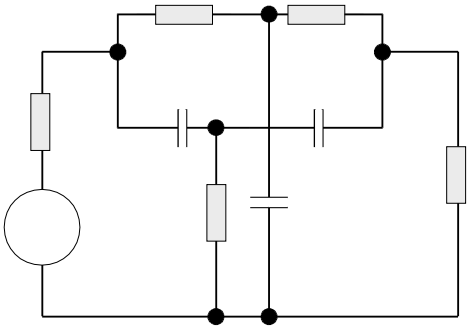
Déterminez le nombre de mailles nécessaires à l'analyse des réseaux suivants :



Circuit 1



Circuit 2



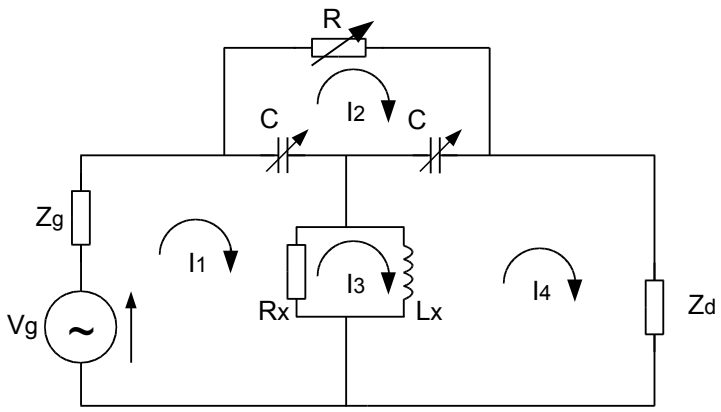
Circuit 3

*Nota Bene : Les exercices 1 à 4 sont à traiter d'abord par la méthode des mailles, puis par la méthode des noeuds.*

## Exercice 1 :

Dans le réseau représenté sur la figure ci-dessous (circuit 4) la résistance R et les deux condensateurs C sont ajustables de façon à annuler le courant dans l'impédance $Z_d$.

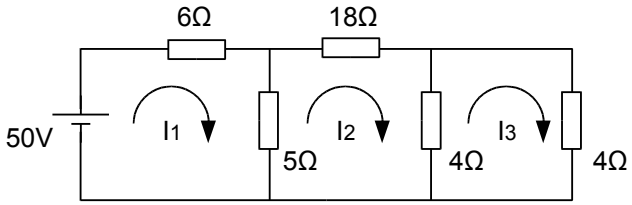
Calculez les valeurs de $R_x$ et $L_x$ en fonction de R, C et de la pulsation $\omega$ de la source.




Circuit 4

## Exercice 2 :

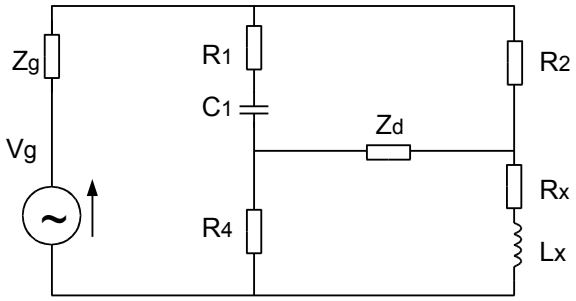
Pour le réseau représenté sur la figure (circuit 5) déterminez l'impédance d'entrée vue de la source continue 50 V. Déduisez-en le courant $I_1$ en utilisant la valeur trouvée de l'impédance. De même calculez $I_3$ en utilisant l'impédance de transfert.



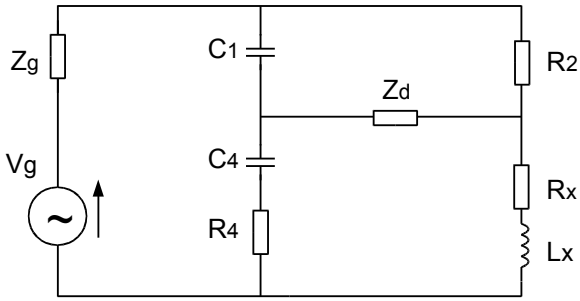

circuit 5

## Exercice 3 et 4 :

Les figures représentent respectivement le pont de Hay et le pont d'Owen, déterminez les valeurs de $R_x$ et $L_x$ pour que le courant $Z_d$ soit nul.



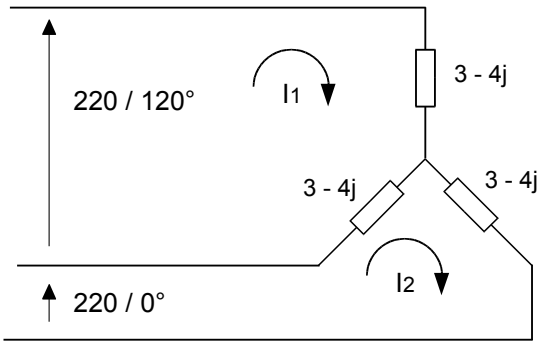

Pont de Hay




Pont d'Owen

## Exercice 5 :

Déterminez les courants $I_A$, $I_B$ et $I_C$ dans le circuit suivant :

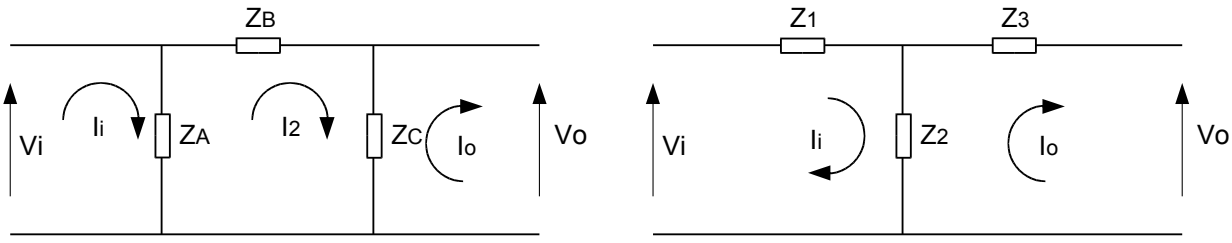



circuit 6

## Exercice 6 :

Deux circuits sont équivalents si leurs impédances d'entrée, de sortie et de transfert sont égales.

Appliquez ce résultat en trouvant les conditions d'équivalence des deux circuits suivants :




Triangle Étoile

## Exercice 7 :

Calculez les matrices impédance [ Z ] et admittance [Y ] d'un quadripôle en T.

Calculez les matrices impédances [ Z] et admittance [ Y ] d'un quadripôle en $\prod$.

Calculez les matrices de transfert [ T ] et hybride [ H ] des quadripôles en T et en $\prod$.

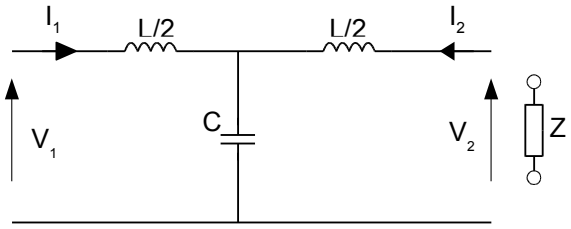
## Exercice 8 :

On considère un quadripôle en T alimenté en courant sinusoïdal de pulsation $\omega$ . Ce quadripôle est chargé par une impédance Z.

Trouvez l'expression générale donnant l'impédance d'entrée d'un quadripôle chargé.

Le quadripôle est constitué de deux bobines de self induction montées en série et de valeur $\frac{L}{2}$ et d'une capacité C.

Déterminez la condition pour que l'impédance d'entrée du quadripôle soit égale Z, l'impédance de charge. Discutez en fonction de la valeur de $\omega$ .




Quadripôle T.

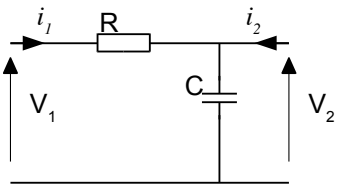
## Exercice 9 :

Montrez qu'un quadripôle passif à plusieurs mailles peut être remplacé par un quadripôle en $\prod$.

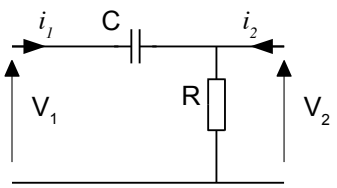
## Exercice 10 :

On considère un circuit composé d'une résistance R et d'un condensateur C en série. Ce circuit est connecté à une source de tension sinusoïdale $V_1$. Déterminez les caractéristiques de la fonction de transfert $H(j\omega)$ dans deux cas :

- $V_2$ est mesuré aux bornes du condensateur C
- $V_2$ est mesuré aux bornes de la résistance R.




Cas 1



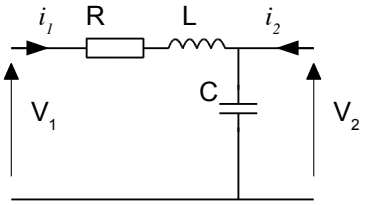

Cas 2

## Exercice 11 :

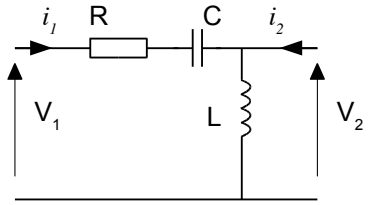
Soit le circuit composé d'une résistance R, d'un condensateur C et d'une bobine de self induction L en série. Ce circuit est connecté à une source de tension $V_1$.

Déterminez les caractéristiques de la fonction de transfert $H(j\omega)=\frac{V_2}{V_1}$ dans les trois cas :

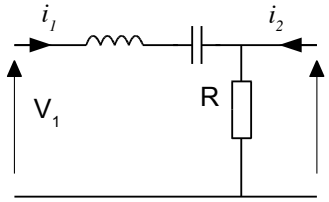
- $V_2$ mesuré aux bornes du condensateur C
- $V_2$ mesuré aux bornes de la bobine L
- $V_2$ mesuré aux bornes de la résistance R.




Cas 1




Cas 2



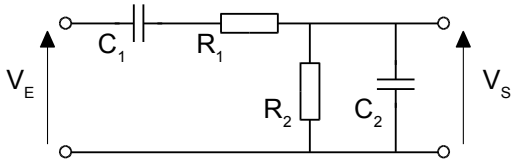

Cas 3

## Exercice 12 :

On considère le circuit représenté ci-dessous (circuit 7) qui est un filtre de Wienn.

- Déterminez la fonction de transfert $H(j\omega)$ de ce filtre.
- Montrez que $H(j\omega)$ peut se mettre sous la forme de trois fonctions de transfert élémentaires :

$$H(j\omega)=\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_1}}\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_2}}j\frac{\omega}{\omega_3}$$



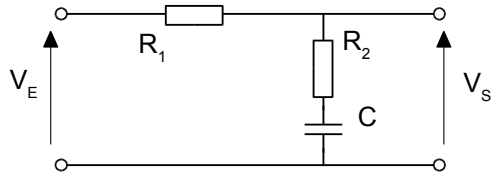

Circuit 7

## Exercice 13 :

On considère le circuit ci-dessous ( circuit 8).

- Déterminez la fonction de transfert de ce circuit $H(j\omega)$
- Montrez que $H(j\omega)$ peut se mettre sous la forme d'un produit de deux fonctions de transfert élémentaires :

$$H(j\omega)=(1+j\frac{\omega}{\omega_1})\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_2}}$$




Circuit 8

## Exercice 14 :

Déterminez les diagrammes de Bode pour la fonction de transfert l'exercice 13.

## Exercice 15 :

Déterminez les diagrammes de Nyquist des fonctions de transfert suivantes :

- $H_1(j\omega)=1+j\frac{\omega}{\omega_0}$
- $H_2(j\omega)=\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$
- $H_3(j\omega)=\frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$
- $H_4(j\omega)=\frac{1}{1+2\mathrm{jm}\frac{\omega}{\omega_0}+\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$