Etude en fonction de la pulsation d'un second ordre : $H(j\omega)=\frac{1}{1+2jm\frac{\omega}{\omega_0}+(j\frac{\omega}{\omega_0})^2}$

Le dénominateur est un trinôme du second degré à coefficients complexes.

On pose $u=jx=j\frac{\omega}{\omega_0}$, le dénominateur se réécrit : $D=1+2jm\frac{\omega}{\omega_0}+(j\frac{\omega}{\omega_0})^2=u^2+2mu+1$.

Le discriminant vaut : $\Delta=4(m^2-1)$ et il se présente donc trois cas :

◊ **Cas m=1 :** $\Delta=0$

Peu d'intérêt et assez irréaliste physiquement parlant, la dispersion des composants empêchant la réalisation d'un tel filtre. Les racines sont doubles.

◊ **Cas m > 1 :** $\Delta>0$

D admet deux racines réelles qui sont respectivement : $u_1=-m+\sqrt{(m^2-1)}$ et $u_2=-m-\sqrt{(m^2-1)}$

D peut être écrit sous forme factorisée : $D=(u-u_1)(u-u_2)=(u_1-u)(u_2-u)=u_1u_2(1-\frac{u}{u_1})(1-\frac{u}{u_2})$

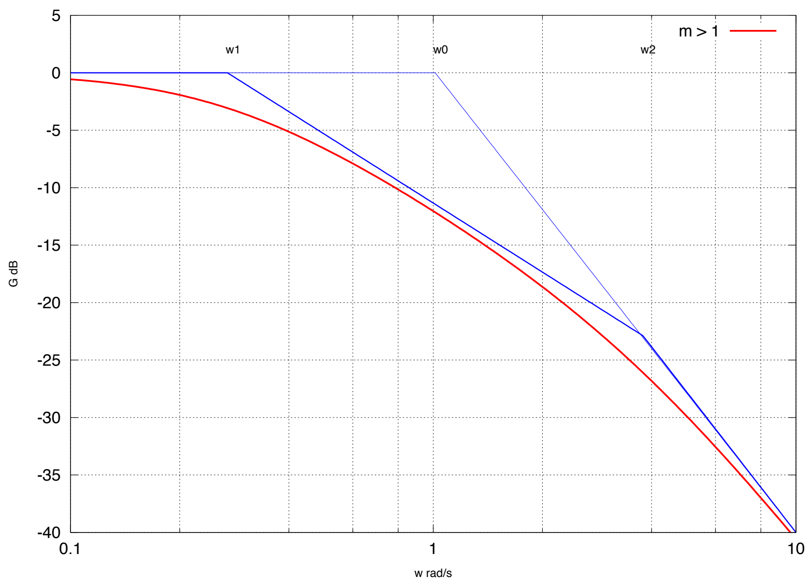
En remplaçant u par sa valeur jx et les racines par leurs valeurs respectives il vient :

$$D=u_1u_2(1+\frac{u}{-u_1})(1+\frac{u}{-u_2})=\left(-m+\sqrt{(m^2-1)}\right)\left(-m-\sqrt{(m^2-1)}\right)\left(1+\frac{jx}{m-\sqrt{(m^2-1)}}\right)\left(1+\frac{jx}{m+\sqrt{(m^2-1)}}\right)$$

Si on pose : $\omega_1=\omega_0(m-\sqrt{(m^2-1)})$ et $\omega_2=\omega_0(m+\sqrt{(m^2-1)})$, D se réécrit[1] :

$$D=(1+j\frac{\omega}{\omega_1})(1+j\frac{\omega}{\omega_2})$$ et donc $$H(j\omega)=\frac{1}{D}=\frac{1}{(1+j\frac{\omega}{\omega_1})(1+j\frac{\omega}{\omega_2})}=\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_1}}\cdot\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_2}}$$

Le Diagramme de Bode est obtenu en mettant en cascade les deux fonctions de transfert du premier ordre :



Le produit $\omega_1\omega_2=\omega_0^2\left(m-\sqrt{(m^2-1)}\right)\left(m+\sqrt{(m^2-1)}\right)=\omega_0^2$. Sur une échelle logarithmique :

1Il y a obligation à avoir $u_1u_2=1$ Il suffit de développer la forme factorisée de D pour aboutir à $u^2-(u_1+u_2)u+u_1u_2=u^2+2mu+1$. Ce résultat est conforté par calcul de u_1u_2

$\log(\omega_1\omega_2)=\log(\omega_0^2)=\log(\omega_1)+\log(\omega_2)=2\log(\omega_0)$, donc ω_0 est le milieu du segment $\omega_1\omega_2$

◊ **Cas m < 1 :** $\Delta<0$

Dans ce cas D admet deux racines complexes conjuguées, la factorisation n'a plus d'intérêt, il faut recourir à une étude directe.

Le gain est le module de $H(j\omega)$, soit : $A(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{((1-x^2)^2+(2mx)^2)}}$.

Pour étudier $A(\omega)$ dérivons son expression :

$$\frac{dA(\omega)}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{((1-x^2)^2+(2mx)^2)}}\right)=\frac{-1}{2}\frac{1}{\left((1-x^2)^2+(2mx)^2\right)^{\frac{3}{2}}}(-4x(1-x^2)+8m^2x)=\frac{-2x(x^2+2m^2-1)}{\left((1-x^2)^2+(2mx)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

La dérivée s'annule (il y a donc un "extremum local") si $x^2=1-2m^2$ mais x^2 doit rester positif, donc $1-2m^2>0$, soit $m<\dfrac{\sqrt{(2)}}{2}\approx 0,707$.

Par conséquent si $m\in\left[0,\dfrac{\sqrt{(2)}}{2}\right[$ il y a un extremum, et si $m\in\left]\dfrac{\sqrt{(2)}}{2},1\right[$ il n'y pas d'extremum. On peut alors construire le tableau de variation :

x	0		$\sqrt{(1-2m^2)}$		∞
dA/dx		+	0	-	
A	1	↗		↘	0
20 log(A)	0	↗		↘	$-\infty$

Diagrammes de Bode :