

**Durée 1h00**

**Aucun document autorisé.**

**Calculatrices, téléphones, interdits**

**Tout calcul non détaillé ne sera pas pris en considération.**

---

**Problème :**

Soit une matrice  $\mathbf{M}$  :

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 6 & 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

1. En utilisant la méthode du produit en croix, donnez une décomposition en deux matrices notées L et R de la matrice M. On utilisera la notation vue en travaux dirigés.

On donne la matrice  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$  et les vecteurs  $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  et  $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. Montrez, en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, comment construire un système d'équations permettant de calculer les coefficients du polynôme caractéristique d'une matrice quelconque.
3. Tentez d'appliquer la méthode à la matrice A d'abord avec le vecteur U puis avec le vecteur V. Avec quel vecteur la méthode est-elle impossible ? Pourquoi ?
4. Construisez un système d'équations permettant le calcul des coefficients du polynôme caractéristique de A en utilisant les réponses aux questions précédentes.
5. En utilisant la méthode du produit en croix et les réponses précédentes (questions 1 à 4), déterminez les coefficients du polynôme caractéristique  $P(\lambda)$ .
6. En utilisant la réponse à la question 3, donnez  $\lambda_1$  une des racines de  $P(\lambda)$ . Justifiez votre réponse.
7. A l'aide d'un schéma de Horner, calculez  $Q(\lambda) = \frac{P(\lambda)}{\lambda - \lambda_1}$
8. Calculez alors toutes les racines de  $P(\lambda)$ .
9. Donnez la forme factorisée d'un polynôme caractéristique **quelconque** de degré 3. *Il n'est pas question ici du polynôme caractéristique de A, mais bien d'un polynôme quelconque.* Développez cette forme factorisée pour obtenir la forme canonique. Que vaut le terme constant ?
10. On rappelle que  $P(\lambda) = \det(A - \lambda * I)$ . En calculant  $P(\lambda)$  en une valeur astucieusement choisie, donnez la valeur du déterminant de la matrice A.

**Nomenclature :**

La forme factorisée d'un polynôme est :  $P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$

La forme canonique d'un polynôme est :  $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$

**Exercice :**

1. En utilisant la méthode de Gauss-Jordan, calculez  $\mathbf{A}^{-1}$  la matrice inverse de la matrice A du problème.
2. Donnez la valeur du déterminant de A en utilisant la réponse à la question précédente.