

Durée 1h00

Aucun document autorisé.

Calculatrices interdites

Tout calcul non détaillé ne sera pas pris en considération.

Exercice 1 : (≈ 8 points)

Soit une matrice \mathbf{A} :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

1. En utilisant la méthode de Gauss-Jordan, calculez \mathbf{A}^{-1} la matrice inverse de \mathbf{A} .
2. En utilisant les calculs précédents, donnez le déterminant de \mathbf{A} .
3. En utilisant les calculs précédents, résolvez le système d'équations : $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$

avec : $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Exercice 2 : (≈ 12 pts)

Soit la matrice \mathbf{B} :

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Donnez la matrice \mathbf{K} système de Krylov obtenue avec le vecteur \mathbf{V} : $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ ainsi que le second membre \mathbf{b} de

l'équation et le vecteur d'inconnues \mathbf{a} : $\mathbf{K} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}$

2. On veut résoudre le système par la méthode de Crout. Donnez la forme générale des matrices \mathbf{L} et \mathbf{R} , puis déterminez-les.
3. Résolvez alors le système d'équation $\mathbf{K} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}$ à l'aide des matrices \mathbf{L} et \mathbf{R} déterminées ci-dessus.
4. Déduisez-en que $P(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 16\lambda + 32$ est le polynôme caractéristique de la matrice \mathbf{B} .
5. A partir de l'expression de $P(\lambda)$, donnez le déterminant de la matrice \mathbf{B} .
6. En utilisant la méthode d'Horner, calculez le polynôme quotient $Q(\lambda) = \frac{P(\lambda)}{(\lambda - 4)}$. Que représente la valeur 4 pour la matrice \mathbf{B} ? Pourquoi ?

Remarque : La trace d'une matrice est la somme des éléments de sa diagonale principale : $\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum a_i^i$. On montre que la somme des valeurs propres est égale à la trace de la matrice et que le déterminant d'une matrice est le produit de ses valeurs propres.

7. En utilisant la remarque précédente et la réponse à la question 6, déterminez les valeurs propres de la matrice \mathbf{B} .