

Durée 1h00**Documents, Calculatrices & Téléphones interdits.****Tout calcul non détaillé ne sera pas pris en considération.**Votre copie doit être lisible par le correcteur !

Question de Cours : (4 points)

Montrez qu'il est possible de calculer la valeur de la dérivée d'un polynôme quelconque en un point α à l'aide de schémas de Horner.

Problème (incluant des questions de cours) : (≈ 30 Min max)

Soit le système d'équation :
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_2 \\ U_1 \\ U_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -U_3 \end{bmatrix}$$

1. À l'aide de la méthode de Gauss-Jordan, calculez B la matrice inverse de la matrice $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$. (4 points)
2. Calculez la solution du système ci-dessus à l'aide de la matrice B. (2 points)

Les a_i sont les coefficients du polynôme caractéristique de la matrice A :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Quel est le degré de ce polynôme ? (1 point)
4. Donnez l'expression du polynôme $P(x)$ caractéristique de la matrice A. (1_point)
5. Calculez à l'aide de la méthode de Horner, le polynôme quotient $Q(x)$ tel que l'on ait : $P(x) = (x+1)*Q(x)$. (2 points)
6. Qu'est -1 pour $P(x)$? (1 point)
7. Calculez alors le vecteur $V = U_2 - 3U_1 + 2U_0$ (1point)
8. Calculez le produit $A*V$. Qu'est V pour la matrice A ? (1 point)
9. Donnez la décomposition en matrice L et R de la matrice M de la question 1 avec la convention pour les matrices L et R vue en TD. (3 points)

Corrigé

Question de cours : Cf le cours

Problème :

Question 1 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Opération 1 : le pivot 1 est 1, il n'y a pas d'opération 1

Opérations 2 : On calcule $L_2 = L_2 - L_1, L_3 = L_3 - 3L_1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Opération 1 : $L_2 = L_2 / -2$

Opérations 2 : $L_1 = L_1 - L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Opération 1 : $L_3 = L_3 / -3$

Opérations 2 : $L_1 = L_1 - L_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1/3 \end{bmatrix}$$

On a donc $B = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & -1/3 \end{bmatrix}$

2/ Le système est $Ax=b$, par conséquent on a : $x = A^{-1}b = Bb$.

$$x = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3/ La matrice est de dimension 3, a priori le polynôme est de degré 3.

4/ $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

5 / $P(x) = (x+1)Q(x)$.

Calcul de la division de $P(x)$ par $x+1$ soit $\alpha = -1$.

$P(x) \quad P(-1)$

1 1

$$-2 \quad -1*1-2 = -3$$

$$-1 \quad -1*-3 -1 = 2$$

$$2 \quad -1*2 + 2 = 0$$

$$\text{Donc } P(x) = (x+1)(x^2 - 3x + 2) + 0$$

6/ -1 est racine de P(x).

$$7/ \quad V = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$8/ \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

V est le vecteur propre associé à la valeur propre -1 de la matrice A

9/ En appliquant la méthode du produit en croix :

$$PC = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$L_2^2 = -1 - 1*1 = -2$$

$$L_2^3 = 3 - 1*3 = 0$$

$$R_3^2 = (1 - 1*1) / -2 = 0$$

$$L_3^3 = 0 - 1*3 - 0*0 = -3$$

$$\text{soit } L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{et } R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$