

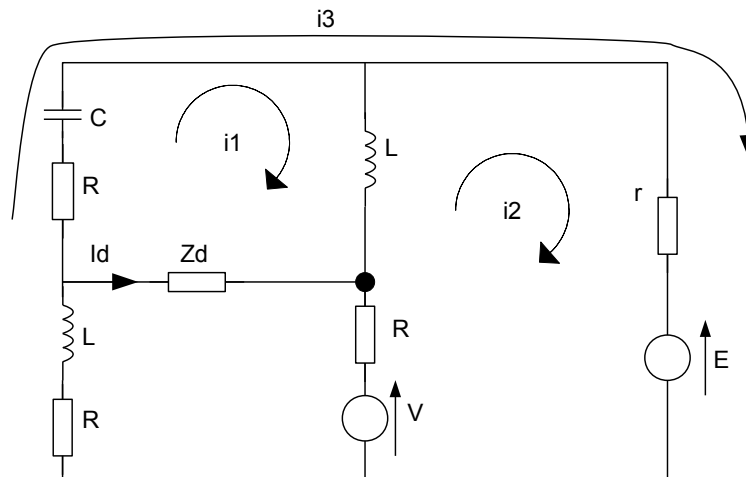
Durée 1h00

Documents, Calculatrices & Téléphones interdits.

Tout calcul non détaillé ne sera pas pris en considération.

Votre copie doit être lisible par le correcteur !

On considère le circuit ci-dessous.



Remarque préliminaire : dans ce circuit les composants L et C sont tels que l'on a : $|L\omega| = \left| \frac{1}{C\omega} \right|$.

1. Calculez le nombre de mailles nécessaires pour déterminer tous les courants du circuit ci-dessus par deux méthodes différentes. (2 points : 1+1)
2. Donnez M , la matrice des mailles, en respectant les mailles indiquées sur le schéma ci-dessus ainsi que le second membre du système d'équations permettant de déterminer tous les courants du circuit. (3 points -1 par erreur)
3. En tenant compte de la remarque préliminaire, supprimez dans la matrice M de la question 2 toute occurrence du terme $\frac{1}{jC\omega}$. (2 points 1 pour $1/jC\omega = -jL\omega$ -cadeau je sais- 1 pour matrice)
4. Déterminez V en fonction des composants du circuit et de E permettant d'annuler I_d . (5 points : 2 pour méthode, 3 pour calcul)
5. Calculez la valeur de V si l'on impose $r = R = L\omega$. (2 points 1,5 si simplification non faite)
6. On impose $V=0$. Montrez à partir de la question 3 que l'on ne peut alors annuler I_d . (3 points 1 pour réécriture/exploitation des résultats précédents + 2 pour calcul et conclusion)
7. Retrouvez le résultat de la question 6 en utilisant la méthode des ponts. (3 points : méthode et conclusion)

Corrigé

1/ Il y a 6 branches, 4 noeuds soit $6 - (4 - 1) = 3$ équations. (+ méthode des graphes)

$$2/ \begin{bmatrix} R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega + Z_d & -jL\omega & R + \frac{1}{jC\omega} \\ -jL\omega & jL\omega + r + R & r \\ R + \frac{1}{jC\omega} & r & 2R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} + r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ V - E \\ -E \end{bmatrix}$$

3/ Puisque $L\omega = \frac{1}{C\omega}$ on a $\frac{1}{C\omega} = L\frac{\omega}{j} = -jL\omega$.

Le système devient donc :

$$\begin{bmatrix} R + Z_d & -jL\omega & R - jL\omega \\ -jL\omega & jL\omega + r + R & r \\ R - jL\omega & r & 2R + r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ V - E \\ -E \end{bmatrix}$$

4/ Avec le choix des mailles fait, I_d s'identifie à i_1 . On cherche donc V tel que i_1 soit nul.

On détermine i_1 en résolvant le système trouvé en 2/ par la méthode de Cramer, soit :

$$i_1 = \frac{1}{\Delta_{\text{système}}} \begin{vmatrix} 0 & -jL\omega & R - jL\omega \\ V - E & jL\omega + r + R & r \\ -E & r & 2R + r \end{vmatrix}$$

On veut $i_1 = 0$ et comme le déterminant du système n'est pas nul, on a : $\begin{vmatrix} 0 & -jL\omega & R - jL\omega \\ V - E & jL\omega + r + R & r \\ -E & r & 2R + r \end{vmatrix} = 0$

Soit en développant le déterminant suivant la première colonne :

$$(-1)^{2+1}(V-E) \begin{vmatrix} -jL\omega & R - jL\omega \\ r & 2R + r \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}(-E) \begin{vmatrix} -jL\omega & R - jL\omega \\ R + r + jL\omega & r \end{vmatrix} = 0$$

En calculant les cofacteurs il vient :

$$(E - V)(-jL\omega(2R + r) - rR + jLr\omega) - E(-jLr\omega - (R + r + jL\omega)(R - jL\omega)) = 0$$

soit :

$$(E - V)(-2jLR\omega - rR) - E(-R^2 - rR + (jL\omega)^2) = 0$$

d'où :

$$V(2jLR\omega + rR) = E[-R^2 + (jL\omega)^2 + 2jLR\omega]$$

On a donc :

$$V = E \frac{-R^2 - L^2\omega^2 + 2jLR\omega}{rR + 2jLR\omega}$$

5/ Si on impose $r = R = L\omega$ l'expression ci-dessus se réécrit :

$$V = E \frac{-2R^2 + 2jR^2}{R^2 + 2jR^2} = 2E \frac{-1 + j}{1 + 2j} = 2E \frac{(-1 + j)(1 - 2j)}{1 + 4} = \frac{2}{5}E(1 + 3j)$$

6/ En cas le système se réécrit :

$$\begin{bmatrix} R + Z_d & -jL\omega & R - jL\omega \\ -jL\omega & jL\omega + r + R & r \\ R - jL\omega & r & 2R + r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -E \\ -E \end{bmatrix}$$

et annuler i_l revient à annuler :

$$\begin{vmatrix} 0 & -jL\omega & R-jL\omega \\ -E & jL\omega+r+R & r \\ -E & r & 2R+r \end{vmatrix}$$

Soit :

$$E(-jL\omega(2R+r)-rR+jLr\omega)-E(-jLr\omega-(R+r+jL\omega)(R-jL\omega))=0$$

Ce qui conduit en développant à :

$$E(-2jLR\omega-rR)+E(R^2+rR-(jL\omega)^2)=0$$

soit :

$$2jLR\omega+rR=R^2+rR+L^2\omega^2$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires :

$$\text{Réel : } R^2+L^2\omega^2=0$$

$$\text{Imaginaire : } 2jLR\omega=0$$

La seconde équation conduit si l'on ne veut pas L, R et r nuls à $\omega=0$, ce qui conduit en reportant dans la condition sur la partie réelle à $R=0$ contrairement à l'hypothèse de départ. Il n'y a donc pas de solution.

7/ on peut mener le même raisonnement en utilisant la méthode des ponts si $V=0$ soit :

$$\frac{R}{R+jL\omega}=\frac{R+jL\omega}{2R+jL\omega+\frac{1}{jC\omega}} \text{ en remplaçant } R, L\omega \text{ et } \frac{1}{C\omega} \text{ par leur valeur en R il vient :}$$

$$\frac{R}{R+jR}=\frac{R+jR}{2R} \text{ soit } 2R^2=(R+jR)^2 \text{ ce qui est impossible.}$$