

Durée 1h00

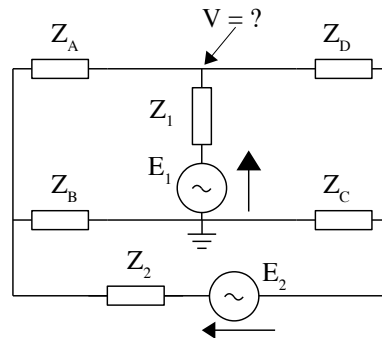
Documents, Calculatrices & Téléphones interdits.

Tout calcul non détaillé ne sera pas pris en considération.

Votre copie doit être **lisible** par le correcteur !

Exercice (≈ 15 points)

On considère le circuit ci-dessous.



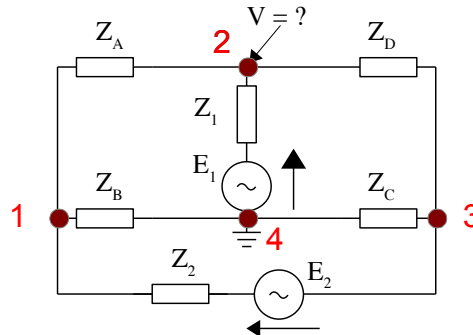
1. Donnez le nombre de noeuds que ce circuit comporte. Quelle sera la dimension de la matrice des noeuds ?

Le circuit comporte 4 noeuds, la matrice sera de dimension trois.

2. Donnez l'équation matricielle permettant de calculer le potentiel en chaque noeud en utilisant la méthode des noeuds à l'exclusion de toute autre méthode.

Remarque : On notera respectivement Y_A l'admittance associée à Z_A , Y_B celle associée à Z_B etc.

En numérotant les noeuds comme suit :



La matrice des Noeuds est :

$$\begin{bmatrix} Y_A + Y_B + Y_2 & -Y_A & -Y_2 \\ -Y_A & Y_A + Y_D + Y_1 & -Y_D \\ -Y_2 & -Y_D & Y_C + Y_D + Y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_2 Y_2 \\ E_1 Y_1 \\ -E_2 Y_2 \end{bmatrix}$$

3. À l'aide de la question 2, donnez l'expression permettant le calcul du potentiel V indiqué sur le schéma ci-dessus.

Remarque : Dans cette expression les déterminants et cofacteurs ne seront pas calculés.

Le potentiel V correspond à V_2 du système matriciel obtenu en question 2. En utilisant la méthode de Cramer il vient :

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} Y_A + Y_B + Y_2 & E_2 Y_2 & -Y_2 \\ -Y_A & E_1 Y_1 & -Y_D \\ -Y_2 & -E_2 Y_2 & Y_C + Y_D + Y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Y_A + Y_B + Y_2 & -Y_A & -Y_2 \\ -Y_A & Y_A + Y_D + Y_1 & -Y_D \\ -Y_2 & -Y_D & Y_C + Y_D + Y_2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\Delta} ((-1)^{1+2} E_2 Y_2 \Delta_2^1 + (-1)^{2+2} E_1 Y_1 \Delta_2^2 + (-1)^{3+2} (-E_2 Y_2) \Delta_2^3)$$

4. On désire que V soit nul. Quelle relation existe-t-il alors entre les tensions E_1 , E_2 et les admittances des éléments du circuit ?

En ce cas V_2 est nul soit : $(-1)^{1+2} E_2 Y_2 \Delta_2^1 + (-1)^{2+2} E_1 Y_1 \Delta_2^2 + (-1)^{3+2} (-E_2 Y_2) \Delta_2^3 = 0$ puisque le déterminant de la matrice des Noeuds n'est pas nul et est fini.

Ce qui conduit à :

$$-E_2 Y_2 \begin{vmatrix} -Y_A & -Y_D \\ -Y_C & Y_C + Y_D + Y_2 \end{vmatrix} + E_1 Y_1 \begin{vmatrix} Y_A + Y_B + Y_2 & -Y_2 \\ -Y_C & Y_C + Y_D + Y_2 \end{vmatrix} + E_2 Y_2 \begin{vmatrix} Y_A + Y_B + Y_2 & -Y_2 \\ -Y_A & -Y_D \end{vmatrix} = 0$$

Soit :

$$\begin{aligned} -E_2 Y_2 (-Y_A (Y_C + Y_D + Y_2) - Y_D Y_2) + E_1 Y_1 ((Y_A + Y_B + Y_2)(Y_C + Y_D + Y_2) - Y_2 Y_2) + E_2 Y_2 ((Y_A + Y_B + Y_2)(-Y_D) - Y_2 Y_A) &= 0 \\ E_2 Y_2 (Y_A (Y_C + Y_D + Y_2) + Y_D Y_2 - (Y_A + Y_B + Y_2) Y_D - Y_2 Y_A) + E_1 Y_1 ((Y_A + Y_B + Y_2)(Y_C + Y_D + Y_2) - Y_2 Y_2) &= 0 \\ E_2 Y_2 (-Y_A Y_C + Y_B Y_D) = E_1 Y_1 ((Y_A + Y_B + Y_2)(Y_C + Y_D + Y_2) - Y_2 Y_2) \end{aligned}$$

5. On précise que Z_D est une bobine parfaite de coefficient d'auto-induction L , Z_C un condensateur de capacité C , et que les sources E_1 et E_2 sont réglées sur une même fréquence telle que l'on ait $LC\omega^2 = 1$. Donnez alors la valeur de la somme

$$Y_D + Y_C$$

On précise que Z_D est une bobine et que Z_C est une capacité, donc :

$$Z_D = jL\omega \quad \text{et} \quad Z_C = \frac{1}{jC\omega} \quad \text{par conséquent :} \quad Y_D = \frac{1}{jL\omega} = \frac{-j}{L\omega}; Y_C = jC\omega \quad \text{et} \quad Y_D + Y_C = \frac{-j}{L\omega} + jC\omega$$

On précise que l'on est dans les conditions où : $LC\omega^2 = 1$ soit : $C\omega = \frac{1}{L\omega}$

Par conséquent, dans ces conditions $Y_D + Y_C = 0$

6. Réécrivez en conséquence l'équation obtenue à la question 4.

Avec les conditions précisées à la question 5, la condition $V_2 = 0$ conduit à résoudre l'équation :

$$E_2 Y_2 (-Y_A Y_C + Y_B Y_D) = E_1 Y_1 (Y_A + Y_B) (Y_2)$$

7. On précise que $Z_A = Z_B = Z_2 = R$. Déterminez la valeur que doit avoir Z_1 pour que V soit nul.

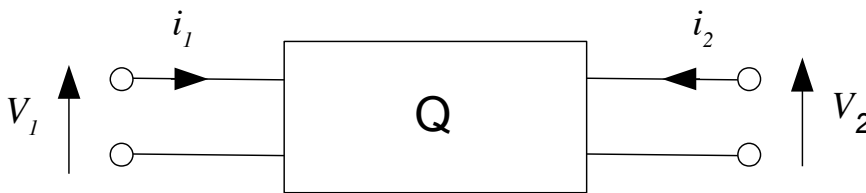
En notant Y l'admittance associé à R , l'équation trouvée à la question 6 se réécrit.

$$E_2 Y^2 (-jC\omega + \frac{-j}{L\omega}) = 2 E_1 Y_1 Y^2 \quad \text{Or} \quad C\omega = \frac{1}{L\omega} \quad \text{donc} \quad jC\omega + \frac{j}{L\omega} = 2jC\omega$$

D'où : $-E_2 jC\omega = E_1 Y_1$ et $Y_1 = \frac{-E_2}{E_1} jC\omega$ par conséquent : $Z_1 = \frac{-E_1}{E_2} \frac{1}{jC\omega}$. On peut en déduire que Z_1 est une inductance.

Questions de cours (≈ 5 points)

1. Donnez l'expression de la matrice impédance d'un quadripôle Q . Donnez le schéma du quadripôle en indiquant toutes les grandeurs électriques en entrée et en sortie du quadripôle.



$$\text{La matrice impédance du quadripôle s'écrit : } \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

2. Que vaut le déterminant de la matrice de transfert d'un quadripôle passif ?

Le déterminant de la matrice de transfert d'un quadripôle passif vaut un.

3. À l'aide de la matrice de transfert, donnez l'expression du rapport $\frac{V_2}{V_1}$ dans le cas où le quadripôle est à vide.

$$\text{La matrice de transfert s'écrit : } \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix} \quad \text{ce qui conduit au système :}$$

$$\begin{cases} V_2 = T_{11} V_1 - T_{12} I_1 \\ I_2 = T_{21} V_1 - T_{22} I_1 \end{cases} \quad \text{Or } I_2 = 0, \text{ soit } \begin{cases} V_2 = T_{11} V_1 - T_{12} I_1 \\ T_{21} V_1 = T_{22} I_1 \end{cases}$$

ce qui permet d'écrire : $V_2 = T_{11} V_1 - \frac{T_{12} T_{21} V_1}{T_{22}} = V_1 \frac{T_{11} T_{22} - T_{12} T_{21}}{T_{22}}$ d'où : $\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_{11} T_{22} - T_{12} T_{21}}{T_{22}}$

Cette expression se simplifie dans le cas où le quadripôle est passif en : $\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{T_{22}}$