Université de Toulouse

Propagation des ondes électromagnétiques

Philippe Teulet
Philippe.teulet@laplace.univ-tlse.fr

Manitra Razafinimanana
manitra.razafinimanana@laplace.univ-tlse.fr

Propagation des ondes électromagnétiques

Plan général du cours

I. Généralités sur les phénomènes de propagation

II. Ondes électromagnétiques planes dans le vide et les milieux matériels

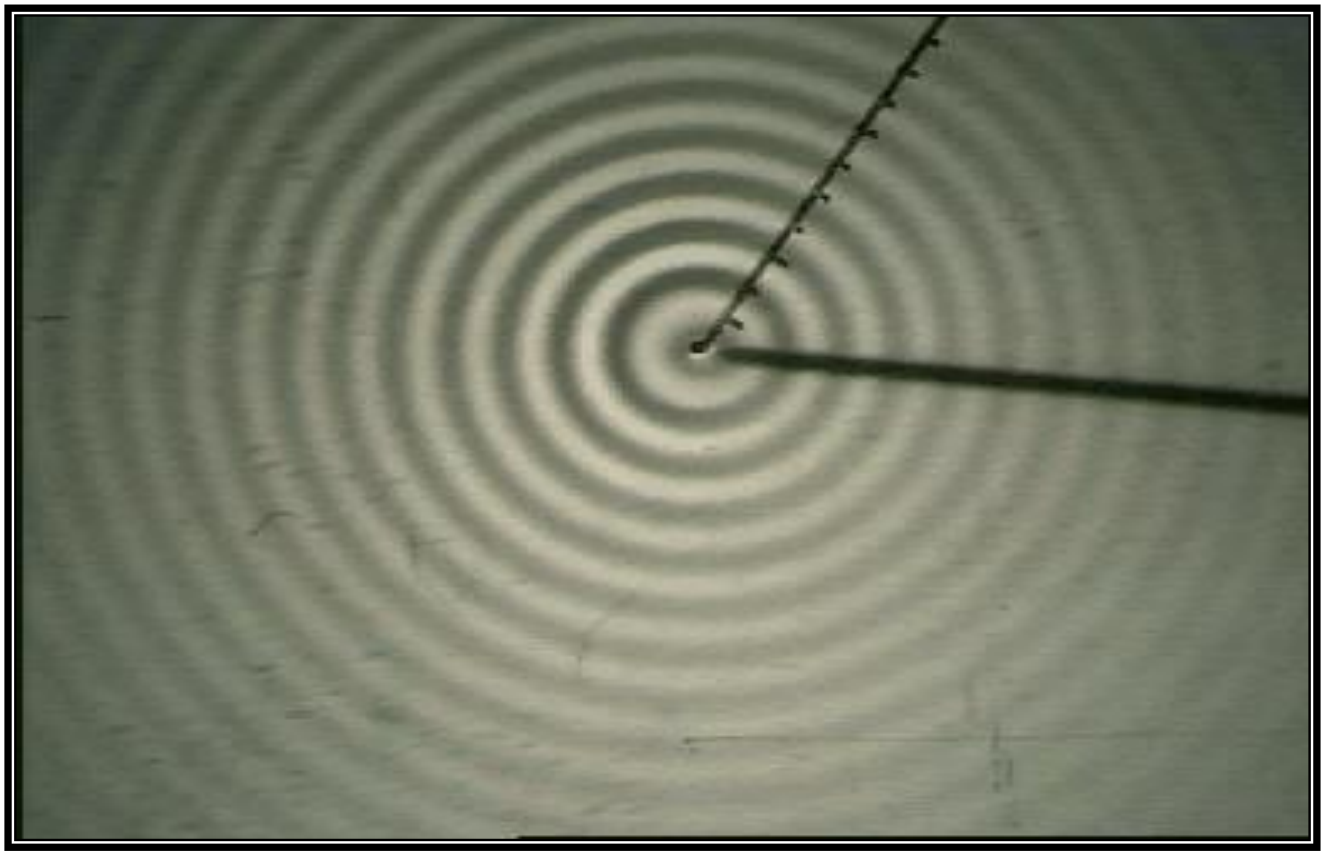
III. Ondes électromagnétiques guidées

I. Généralités sur les phénomènes de propagation

1) Ondes
2) Equation de propagation
3) Ondes périodiques. Ondes sinusoïdales

1 - Ondes

Ondes à la surface de l'eau : propagation d'une perturbation.
Les molécules d'eau se déplacent au passage de la perturbation mais elles ne sont pas entrainées par la perturbation.



Dans un phénomène ondulatoire (c'est-à-dire pour une onde électromagnétique), il n'y a pas déplacement de matière. En revanche, c'est l'énergie qui se propage.

Caractéristique fondamentale d'une onde :

Phénomène de transport d'énergie sans transport de matière.

Ondes électromagnétiques

La perturbation n'est plus de nature mécanique mais de nature ***électromagnétique***.

La propagation des ondes électromagnétiques ne nécessite pas l'existence d'un support matériel.

Domaines des ondes électromagnétiques :

- ✓Rayonnement γ
- ✓Rayons X
- ✓Rayonnement UV, visible et IR (lumière)
- ✓Hyperfréquences ou micro-ondes
- ✓Ondes radio

2 - Equation de propagation

Fonction d'onde *s(M,t)*, par exemple *s(x,y,z,t)* en coordonnées cartésiennes ou *s(r,θ,φ,t)* en coordonnées sphériques

$$\frac{\partial^2 s(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

à une dimension

$$\Delta s(M,t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s(M,t)}{\partial t^2} = 0$$

à trois dimensions

où Δ est l'opérateur laplacien

L'équation de propagation sera vue et établie en TD

$$\Delta s(x,y,z,t) = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}$$

(coordonnées cartésiennes)

Remarques :

✓ L'équation de propagation ne contient aucun terme dissipatif : elle ne rend pas compte des phénomènes d'amortissement.

✓ Il n'y a pas de terme source : c'est uniquement une équation de propagation (il faut créer l'onde).

Solution générale de l'équation de propagation :

$$s(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt)$$

Onde se propageant dans le sens des x croissants

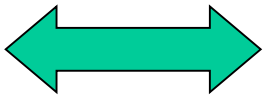
Onde se propageant dans le sens des x décroissants

3. Ondes périodiques - Ondes sinusoïdales

Onde périodique :

En un point, la perturbation reprend la même valeur en deux instants séparés par un intervalle de temps T.

A cause du couplage entre variations spatiales et variations temporelles, on a une double périodicité:

Périodicité temporelle  Périodicité spatiale

On se limite à des fonctions sinusoïdales (théorème de Fourier)

$$s(x,t) = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi\right] + B\cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{v}\right) + \psi\right]$$

$$s(x,t) = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi\right] + B\cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{v}\right) + \psi\right]$$

A , B : amplitudes,

ω : pulsation (rad/s),

f : fréquence (Hz),

T : période (s)

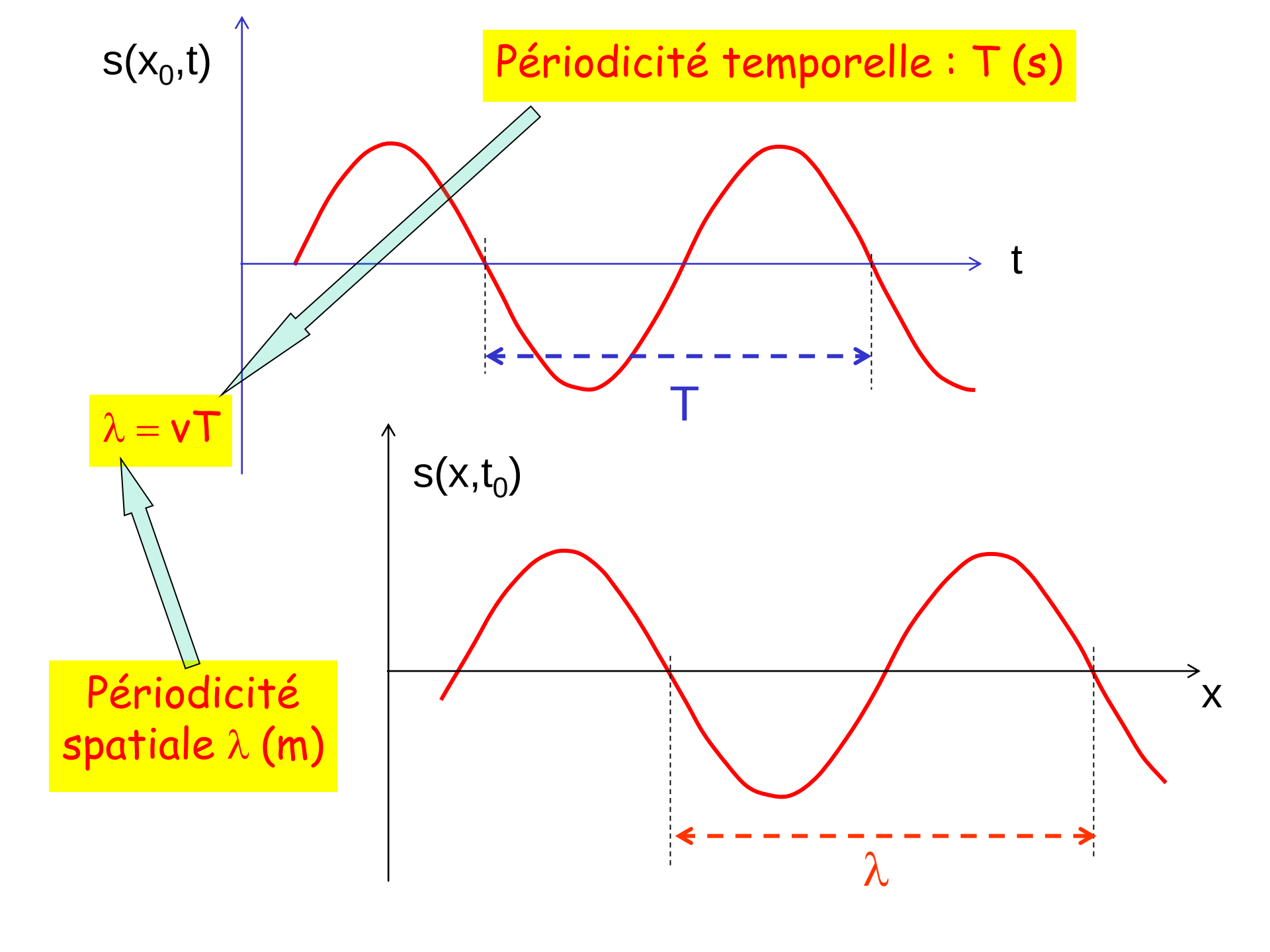
$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

$$s(x,t) = A\cos\left[\omega t - \frac{\omega}{v}x + \varphi\right] + B\cos\left[\omega t + \frac{\omega}{v}x + \psi\right]$$

$$\Rightarrow s(x,t) = A\cos[\omega t - kx + \varphi] + B\cos[\omega t + kx + \psi]$$

k : module du "vecteur d'onde" (m^{-1}) $\quad k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$

λ : longueur d'onde (m) $\quad \lambda = vT$


s(x0,t)
Périodicité temporelle : T (s)
t
T
λ = vT
s(x,t0)
x
Périodicité spatiale λ (m)
λ

II. Ondes électromagnétiques planes dans le vide et les milieux matériels

I - Onde électromagnétique
- 1 - Champ électromagnétique
- 2 - Equations de Maxwell
- 3 - Equation de propagation
- 4 – Vitesse de phase – Vitesse de groupe

II - Onde Progressive Plane Monochromatique (OPPM)
- 1 - Onde plane
- 2 - Structure de l'onde plane
- 3 - Onde plane monochromatique

III - Aspects énergétiques
- 1 - Densité d 'énergie électromagnétique
- 2 - Vecteur de Poynting

IV – Milieux matériels
- 1 – Equations de Maxwell dans un milieu lhi
- 2 – Propagation d'ondes planes dans un milieu lhi (vide de charges)
- 3 – Vecteur d'onde dans un milieu lhi
- 4 – Cas d'un diélectrique parfait
- 5 – Cas d'un diélectrique imparfait. Milieu à pertes
- 6 – Cas d'un très bon isolant
- 7 – Milieu conducteur parfait
- 8 – Cas d'un bon conducteur. Effet de peau.
- 9 – Puissance dissipée par effet Joule dans un matériau conducteur
- 10 – Conditions à l'interface entre deux milieux

ONDE ELECTROMAGNETIQUE

Les champs électromagnétiques sont une combinaison de champs de forces électriques et magnétiques.

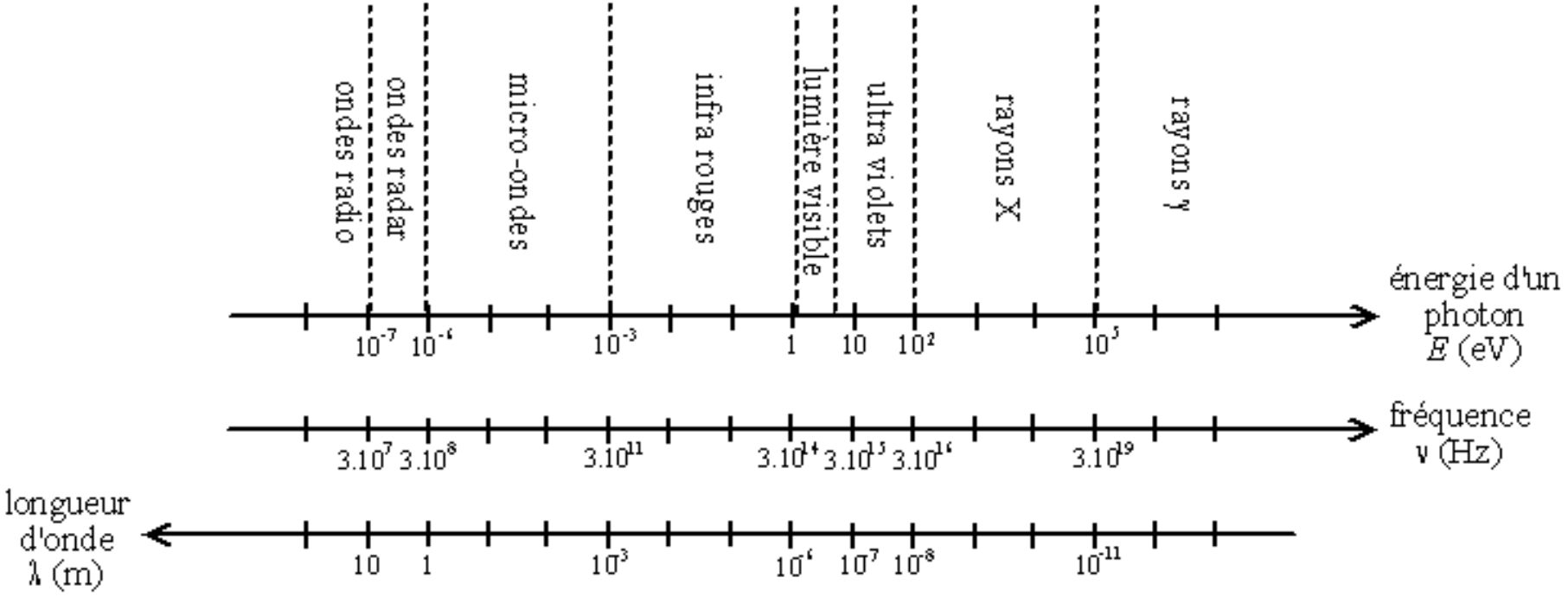
Champs électromagnétiques naturels

✓ Champ magnétique terrestre statique
✓ Champs électriques provoqués par des charges
✓ Ondes lumineuses (lumière)

Champs électromagnétiques d'origine humaine

✓ Champs électromagnétiques générés par des sources de fréquence extrêmement basse (lignes électriques, câblages des appareils électroménagers)
✓ Champs électromagnétiques générés par des sources de plus haute fréquence : ondes radio ($3.10^6 Hz < \nu < 3.10^7 Hz$), ondes de TV, téléphones portables et leurs antennes…

SPECTRE DES ONDES ELECTROMAGNETIQUES



✓ Pour les ondes radio et la lumière, on utilise habituellement la longueur d'onde.

✓ A partir des rayons X, comme on a affaire à des particules très énergétiques, l'énergie correspondant au photon X ou γ détecté est plus utile. Cette énergie est exprimée en électron-Volt (eV)

1 eV : énergie d'un électron accéléré par un potentiel de 1 Volt.

DOMAINE D'UTILISATION DES ONDES ELECTROMAGNETIQUES

I - Onde électromagnétique
1 - Champ électromagnétique

Ondes planes: $\vec{E}$ et $\vec{B}$ (ou $\vec{D}$ et $\vec{H}$) dépendent uniquement d'une variable (par exemple x) et du temps $\vec{E}(x,t)$ et $\vec{B}(x,t)$. Il y a donc invariance du champ électromagnétique dans tout plan caractérisé par x = Cte.

En un point M, à l'instant t,

- Champ électrique $\vec{E}(M,t)$ en Volt/mètre ($V.m^{-1}$)
- Induction électrique $\vec{D}(M,t)$ en Coulomb/mètre carré ($C.m^{-2}$)
- Champ magnétique $\vec{B}(M,t)$ en Tesla (T)
- Excitation magnétique $\vec{H}(M,t)$ en Ampère/mètre ($A.m^{-1}$)

I - Onde électromagnétique
1 - Champ électromagnétique

Dans le vide, $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ et $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

ε_0, permittivité du vide

$\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ F/m

μ_0, perméabilité magnétique du vide

$\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H/m

Dans un milieu matériel linéaire, homogène et isotrope (L.H.I.)

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad , \quad \varepsilon = \varepsilon_0 . \varepsilon_r$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad , \quad \mu = \mu_0 \mu_r$$

2 - Equations de Maxwell

Equations locales de l'électromagnétisme reliant le champ $(\vec{E}, \vec{B})$ aux sources.

Dans un milieu quelconque,

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (1) \qquad \overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$div\vec{B} = 0 \quad (3) \qquad \overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu(\vec{j} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \quad (4)$$

avec $\vec{j}$, vecteur densité de courant de conduction ($A.m^{-2}$),

ρ, densité volumique de charges ($C.m^{-3}$)

$\vec{j} = \sigma.\vec{E}$; σ, conductivité électrique ($S.m^{-1}$)

$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}_D$; vecteur densité de courant de déplacement

ou encore : $\overrightarrow{J_D} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

2 - Equations de Maxwell

Equations locales de l'électromagnétisme reliant le champ $\vec{D}$ et $\vec{H}$ aux sources.

Dans un milieu quelconque :

$$div\vec{D} = \rho \quad (1) \qquad \overrightarrow{rot}\vec{D} = -\varepsilon\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \quad (2)$$

$$div\vec{H} = \rho \quad (3) \qquad \overrightarrow{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad (4)$$

I - Onde électromagnétique
2 - Equations de Maxwell

- Dans le vide ($\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$): $div\vec{E} = 0$ $\quad \overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$div\vec{B} = 0$ $\quad \overrightarrow{rot}\vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

- Dans un milieu linéaire, homogène, isotrope (L.H.I.), en l'absence de charges et de courants:

$div\vec{E} = 0$ $\quad \overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$div\vec{B} = 0$ $\quad \overrightarrow{rot}\vec{B} = \varepsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

I - Onde électromagnétique
3 - Equation de propagation dans le vide

Rappel : $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{E}) = \overrightarrow{grad}(div\vec{E}) - \Delta\vec{E}$

Dans le vide : $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{E}) = \overrightarrow{grad}(div\vec{E}) - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E}$

$$\overrightarrow{rot}(-\frac{\overrightarrow{\partial B}}{\partial t}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{rot}\vec{B}) = -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

Équation de propagation du champ électrique :

$$\Rightarrow \Delta\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \qquad \varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1$$

Propagation à la vitesse : $V = C = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}}$

De même: $\Delta\vec{B} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$ dans le vide

I - Onde électromagnétique
3 - Equation de propagation

Dans un milieu matériel (L.H.I), en l'absence de charges et de courants,

$$\Delta\vec{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

équation de propagation des champ électrique et magnétiques :

$$\Delta\vec{B} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

propagation à la vitesse : $V = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{(\varepsilon_r\varepsilon_0\mu_r\mu_0)}}$

Mais : $\varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1 \Rightarrow V = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} = \frac{c}{n}$

Avec μ_r = 1 très souvent

n : indice du milieu

Onde plane de direction Ox (une variable d'espace)

Rappel (formulaire disponible)

$$\Delta\vec{E} = \begin{vmatrix} \Delta E_x = \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \\ \Delta E_y = \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \\ \Delta E_z = \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \end{vmatrix} \qquad \vec{E} = \vec{E}(x,t) \Rightarrow \Delta\vec{E} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = 0 \qquad (i = x, y, z)$$ *3 équations scalaires*

Solution générale : $E_i = f_i(t-x/c) + g_i(t+x/c)$

I - Onde électromagnétique
4 - Vitesse de phase – vitesse de groupe

Considérons : $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx - \varphi_i)$

La phase est définie par : $\phi(x,t) = (\omega t - kx + \varphi_i)$

$$\phi(x,t) = k\left[\frac{\omega}{k}t - x + \varphi'_i\right]$$

Le plan d'onde avance à la vitesse de phase v_φ : $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$

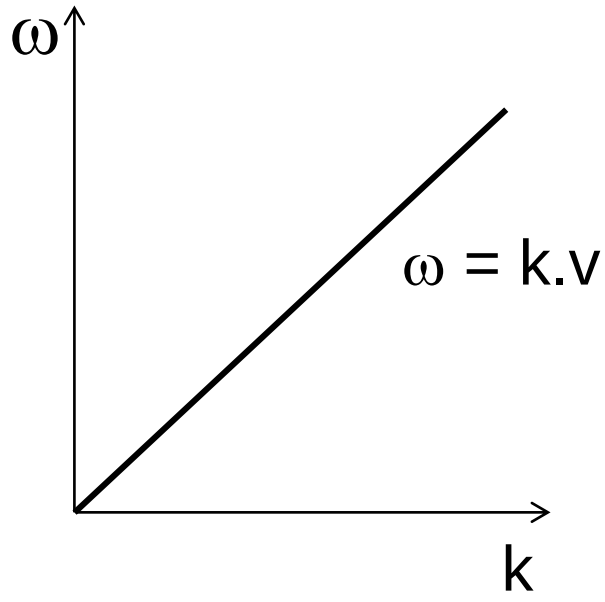
Dans le vide : $v_\varphi = c$

Dispersion

Relation de dispersion pour un phénomène ondulatoire donné :

relation entre ω et k : $\omega(k)$ ou $k(\omega)$

❖ Cas d'un milieu non dispersif :
la vitesse ne dépend pas de la fréquence; la relation de dispersion est représentée par une droite passant par l'origine $\omega = k.v$



I - Onde électromagnétique
4 – Vitesse de phase – vitesse de groupe

Pour un paquet d'ondes (superposition de plusieurs OPPM de fréquences différentes), la vitesse de groupe est définie par :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

dans le vide : $v_g = c$

Si milieu non dispersif alors $v_\varphi = v_g$

II - Onde plane progressive monochromatique

1 - Onde plane

Onde plane :

La grandeur qui se propage s(M,t) (champ scalaire ou vectoriel) a la même valeur en tous les points M des plans perpendiculaires à la direction de propagation

$$\vec{E}(M,t) = \vec{E}_1(t - \frac{z}{v}) + \vec{E}_2(t + \frac{z}{v})$$

Exemple : Propagation par ondes planes suivant Oz $\Rightarrow$ les plans d 'ondes sont des plans perpendiculaires à Oz, parallèles à xOy.

$\vec{E}_1(t - \frac{z}{v})$: Onde plane progressive se propageant dans le sens des z croissants,

$\vec{E}_2(t + \frac{z}{v})$: Onde plane progressive se propageant dans le sens des z décroissants

Surfaces d'ondes

Surface d'onde :
surface atteinte par la perturbation à l'instant t
(lieu des points où la phase est constante)

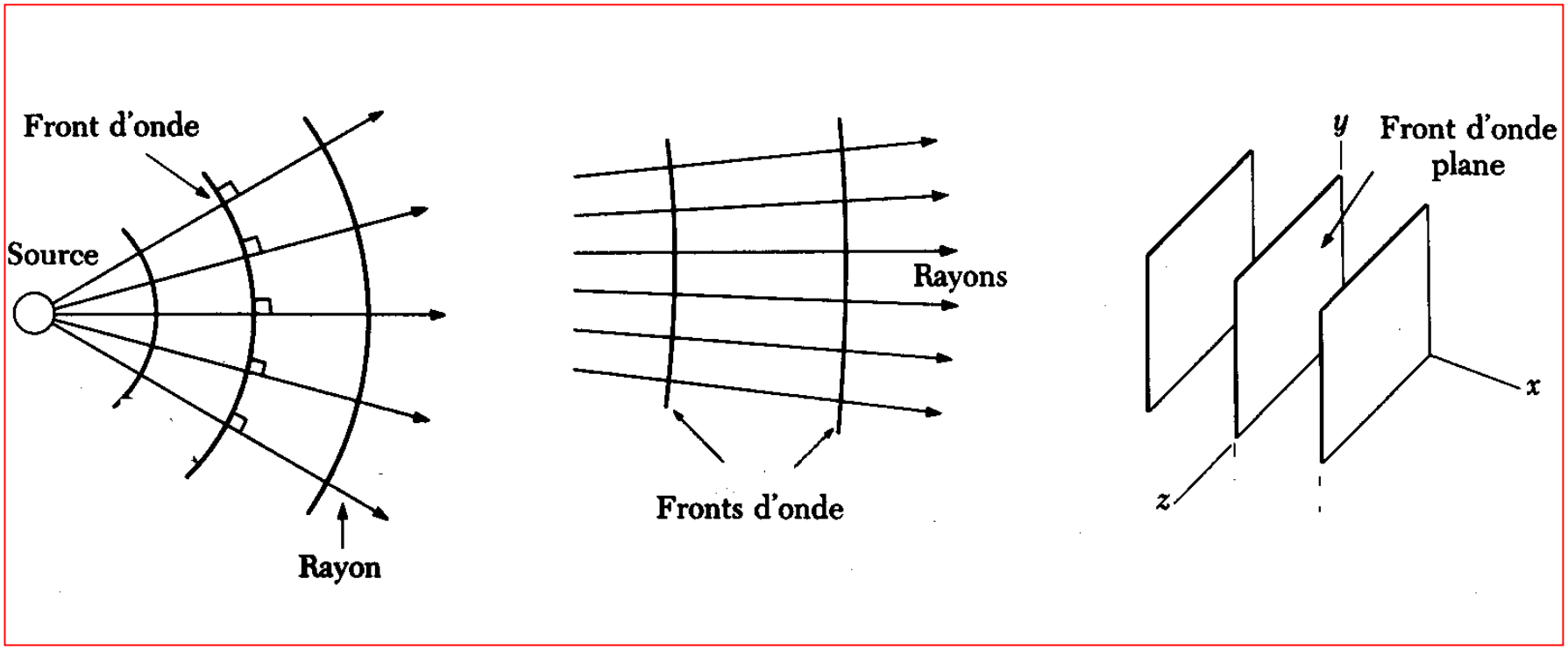
✓Propagation par ondes planes

✓Propagation par ondes sphériques

✓ La normale à la surface d'onde indique la direction de propagation de l'onde ("rayon").

✓ Le vecteur d'onde est le vecteur de module $k=2\pi/\lambda$ porté par la normale à la surface d'onde et dirigé dans le sens de la propagation.

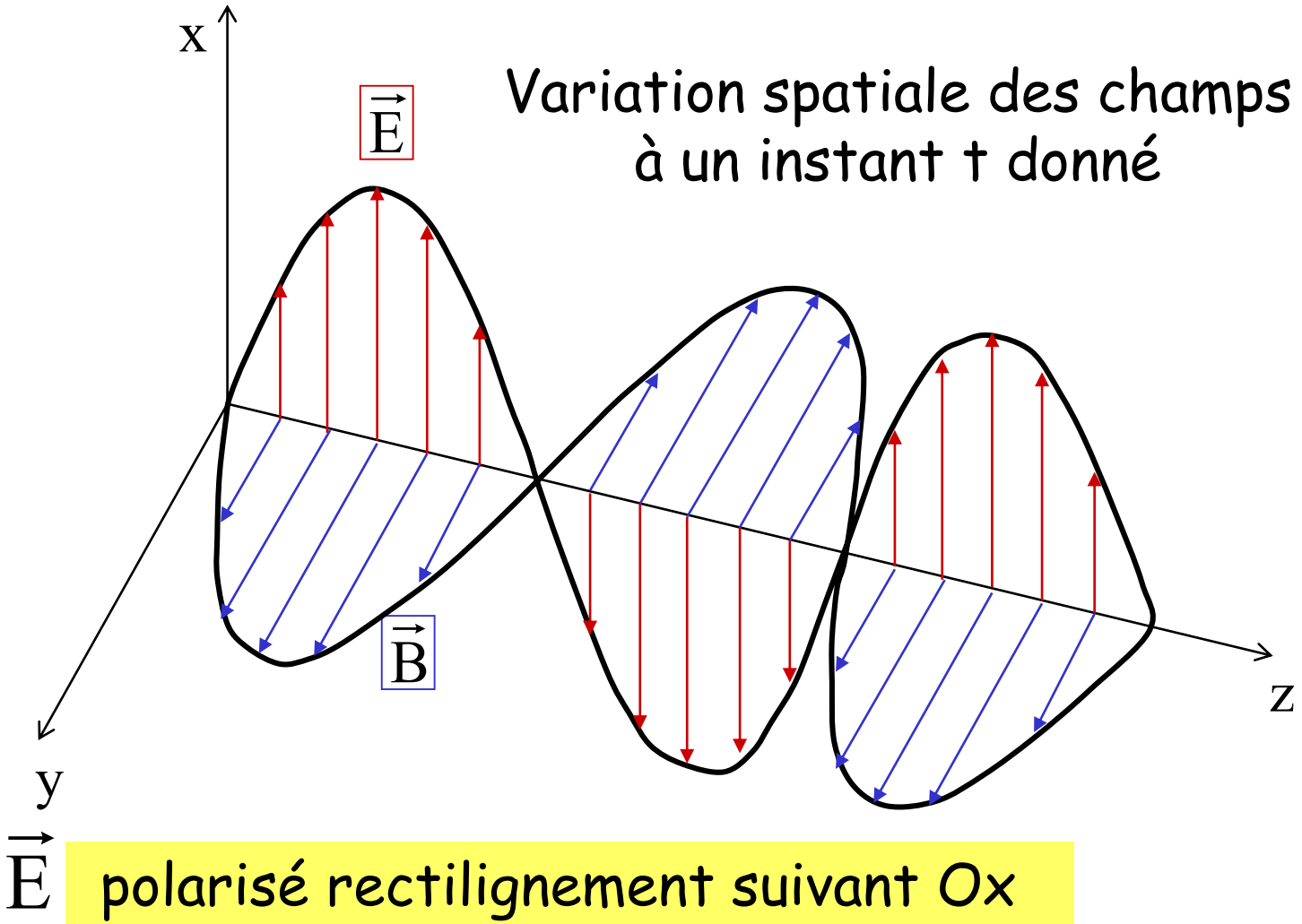
Onde plane : $s(\vec{r},t) = s(x,y,z,t) = A\cos\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r}\right)$



Onde sphérique : $s(\vec{r},t) = s(r,\theta,\varphi) = \frac{A}{r}\cos\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r}\right)$

II - Onde plane progressive monochromatique

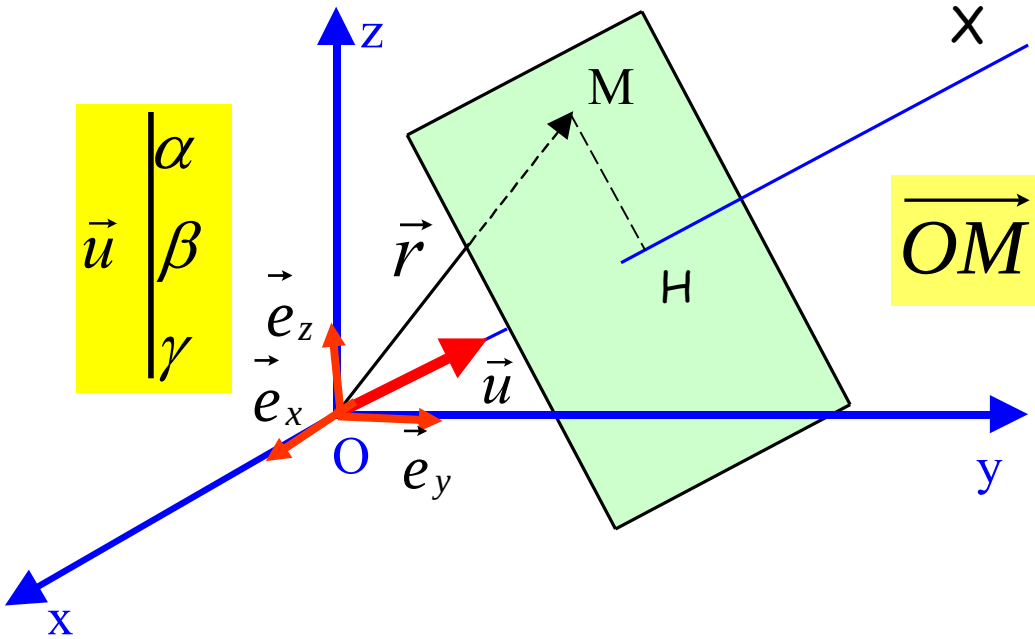
1 - Onde plane



$\vec{E}$ polarisé rectilignement suivant Ox

II - Onde plane progressive monochromatique
1 - Onde plane

Propagation par ondes planes suivant la direction définie par le vecteur unitaire $\vec{u}$; les plans d'ondes sont des plans perpendiculaires à $\vec{u}$



$\vec{u}$ | α | β | γ

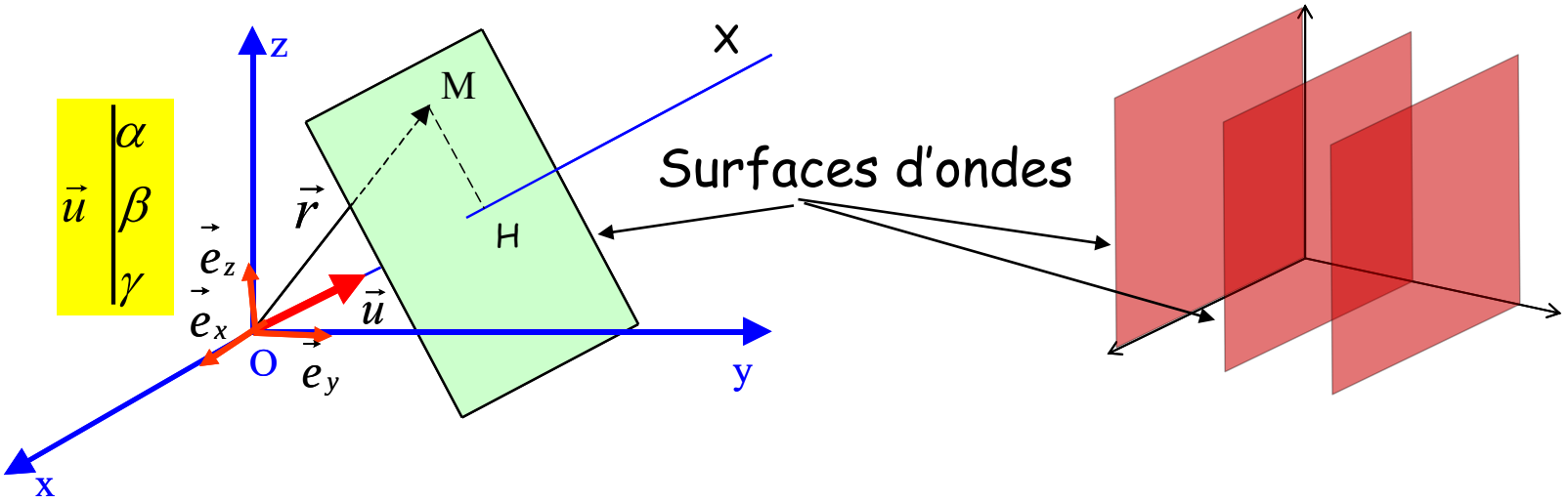
$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

α, β et γ: coefficients directeurs avec: $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = 1$

II - Onde plane progressive monochromatique

1 - Onde plane

Quel que soit le point M(x,y,z) du plan d'onde, $\vec{E}$ est le même à t fixé. Or tous les points M se projettent en H.



$$E_i = E_{0i}\cos(\omega t - kX + \varphi_i) = E_{0i}\cos(\omega t - k\overline{OH} + \varphi_i)$$

$$\overline{OH} = \overrightarrow{OM}.\vec{u} = \alpha x + \beta y + \gamma z = \vec{r}.\vec{u} \Rightarrow E_i = E_{0i}\cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi_i)$$

avec $\vec{k} = k\vec{u}$

II - Onde plane progressive monochromatique

1 - Onde plane

$$\vec{E}(M,t) = \vec{E}_1\left(t - \frac{\vec{u}.\vec{r}}{v}\right) + \vec{E}_2\left(t + \frac{\vec{u}.\vec{r}}{v}\right)$$

$\vec{E}_1\left(t - \frac{\vec{u}.\vec{r}}{v}\right)$ Onde plane progressive se propageant dans le sens de $\vec{u}$

$\vec{E}_2\left(t + \frac{\vec{u}.\vec{r}}{v}\right)$ Onde plane progressive se propageant dans le sens de $-\vec{u}$

Notations complexes

Rappels : $A(\vec{r},t) = A_0 \cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi)$

$$A(\vec{r}) = \mathrm{Re}\left(\underline{A}(\vec{r})\right)$$

$$\underline{A}(\vec{r},t) = A_0 \cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi) + jA_0 \sin(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi)$$

$$\underline{A}(\vec{r},t) = A_0 e^{j(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi)} = A_0 e^{j(\varphi - \vec{k}.\vec{r})} e^{j\omega t} = \underline{A}(\vec{r}) e^{j\omega t}$$

$\underline{A}(\vec{r}) = A_0 e^{j(\varphi - \vec{k}.\vec{r})}$ est l'amplitude complexe

Pour le champ électromagnétique :

$$\begin{bmatrix} \vec{E}(\vec{r},t) \\ \vec{B}(\vec{r},t) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \underline{\vec{E}}(\vec{r},t) = \underline{\vec{E}}(\vec{r}) e^{j\omega t} \\ \underline{\vec{B}}(\vec{r},t) = \underline{\vec{B}}(\vec{r}) e^{j\omega t} \end{bmatrix}$$

Pour l'onde plane :

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\begin{vmatrix} E_x = E_{0x}\cos(\omega t-\vec{k}.\vec{r}+\varphi_x) \\ E_y = E_{0y}\cos(\omega t-\vec{k}.\vec{r}+\varphi_y) \\ E_z = E_{0z}\cos(\omega t-\vec{k}.\vec{r}+\varphi_z) \end{vmatrix}$$

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r},t)=\begin{vmatrix} \underline{E}_x = E_{0x}e^{j\varphi_x}e^{-j\vec{k}.\vec{r}}e^{j\omega t} \\ \underline{E}_y = E_{0y}e^{j\varphi_y}e^{-j\vec{k}.\vec{r}}e^{j\omega t} \\ \underline{E}_z = E_{0z}e^{j\varphi_z}e^{-j\vec{k}.\vec{r}}e^{j\omega t} \end{vmatrix}$$

$$\underline{\vec{E}}_0$$

Pour une onde plane

II - Onde plane progressive monochromatique
2 - Structure de l'onde plane

Soit: $\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 \exp\, j[\omega t - \vec{k}.\vec{r}] = \vec{E}_0 \exp\, j[\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z)]$

avec: $\vec{k} \left|\begin{matrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{matrix}\right._{x,y,z}$ et $\underline{\vec{E}} \left|\begin{matrix} \underline{E}_x \\ \underline{E}_y \\ \underline{E}_z \end{matrix}\right._{x,y,z}$

$$div\,\underline{\vec{E}} = \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial z} = -j\,\vec{k}.\underline{\vec{E}} \Rightarrow \vec{k}.\underline{\vec{E}} = 0 \Rightarrow \vec{E} \subset \text{ plan d'onde}$$

De même: $div\,\underline{\vec{B}} = -j\vec{k}.\underline{\vec{B}} \Rightarrow \vec{k}.\underline{\vec{B}} = 0 \Rightarrow \vec{B} \subset$ plan d'onde

$$\overrightarrow{rot}\,\underline{\vec{E}} = -j\,\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = -j\,\omega \underline{\vec{B}} \Rightarrow \underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}$$

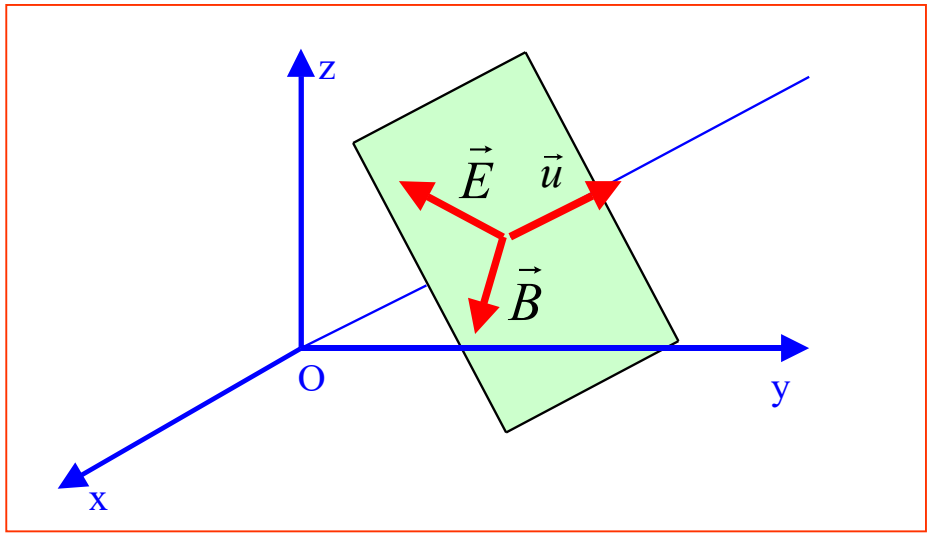
II - Onde plane progressive monochromatique
2 - Structure de l'onde plane

- ✓ $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont dans le plan d 'onde
- ✓ $\vec{E}$ est perpendiculaire à $\vec{B}$
- ✓ $\vec{E}, \vec{B}, \vec{u}$ forment un trièdre direct

- ✓ Et: $\vec{B} = \dfrac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$

$\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont en phase

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \Lambda \underline{\vec{E}}}{\omega} \Rightarrow \frac{E}{B} = \frac{\omega}{k} = c$$



II - Onde plane progressive monochromatique
3 - Onde plane monochromatique

- Champ électrique

$$E_x = E_{0x}\cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r})$$
$$E_y = E_{0y}\cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r})$$
$$E_z = E_{0z}\cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r})$$

Vecteur d 'onde

$$\vec{k} = k\vec{u} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{u}$$

		Temps	Espace
Période		T (s)	λ (m)
Fréquence		$f = \frac{1}{T}$ (Hz)	$\sigma = \frac{1}{\lambda}$ (m^{-1})
Pulsation		$\omega = \frac{2\pi}{T}$ $(rad.s^{-1})$	$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ $(rad.m^{-1})$

Pour une onde plane, réécrivons les équations de Maxwell et l'équation de propagation dans la vide

Equations de Maxwell dans le vide :

$$\overrightarrow{rot}\left(\underline{\vec{E}}(\vec{r})\right) = -j\omega\underline{\vec{B}}(\vec{r})$$

$$\overrightarrow{rot}\left(\underline{\vec{B}}(\vec{r})\right) = j\varepsilon_0\mu_0\omega\underline{\vec{E}}(\vec{r})$$

$$div\left(\underline{\vec{E}}(\vec{r})\right) = 0$$

$$div\left(\underline{\vec{B}}(\vec{r})\right) = 0$$

Equations de propagation dans le vide :

$$\Delta\underline{\vec{E}}(\vec{r}) + \varepsilon_0\mu_0\omega^2\underline{\vec{E}}(\vec{r}) = \vec{0} = \Delta\underline{\vec{E}}(\vec{r}) + \frac{\omega^2}{c^2}\underline{\vec{E}}(\vec{r})$$

$$\Delta\underline{\vec{B}}(\vec{r}) + \varepsilon_0\mu_0\omega^2\underline{\vec{B}}(\vec{r}) = \vec{0} = \Delta\underline{\vec{B}}(\vec{r}) + \frac{\omega^2}{c^2}\underline{\vec{B}}(\vec{r})$$

III - Aspects énergétiques
1 - Densité d'énergie électromagnétique

Densité d'énergie électromagnétique (J/m³) : $$w(M,t) = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Energie électromagnétique (J) dans un volume fini :

$$W(t) = \iiint_{\text{Volume}} w(M,t)\,d\tau = \iiint_{\text{volume}} \left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) d\tau$$

En valeurs moyennes :

$$w_{\text{moyen}}(M) = \langle w(M,t) \rangle_t$$

$$W_{\text{moyen}} = \langle W(t) \rangle_t$$

III - Aspects énergétiques
2 - Vecteur de Poynting

Vecteur de Poynting $\vec{R}$ = vecteur densité de flux de puissance

Le vecteur de Poynting caractérise le transport d'énergie par l'onde électromagnétique.

Energie traversant par unité de temps une surface (S)

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \quad (\mathrm{W/m^2})$$

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{2} \Re e \{ \underline{\vec{R}} \} \quad \text{avec} \quad < \vec{R} >= \frac{1}{2} \mathrm{Re} \left\{ \frac{\underline{\vec{E}} \Lambda \underline{\vec{B}}^*}{\mu_0} \right\} \quad \text{où} \quad \underline{\vec{R}} = \frac{\underline{\vec{E}} \Lambda \underline{\vec{B}}^*}{\mu_0}$$

Puissance (W) moyenne temporelle : $P_m = \iint_{(S)} \langle \vec{R} \rangle . \overrightarrow{dS} = \iint_{(S)} \langle \vec{R} \rangle . \vec{n} dS$

IV – Milieux matériels

1 - Equations de Maxwell dans un milieu linéaire, homogène isotrope

On utilise le vecteur $\vec{D}$ (excitation électrique qui tient compte de la polarisation du milieu due aux dipôles électriques).

$div\vec{D} = \rho$ ρ : densité volumique de charge éventuelle d'origine extérieure au milieu.

Dans un milieu neutre sans charge ajoutée, $div\vec{D} = 0$

Milieux l.h.i (i.e non cristallin)

$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ $\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$ $div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$

On introduit le champ $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$

Pour certains milieux dits « magnétiques » μ n'est plus constant et grand devant μ_0 : on utilise $\vec{H}$ dans le milieu.

Dans tous les diélectriques transparents :

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}) \qquad \overrightarrow{rot}\vec{H} = \vec{j} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

IV – Milieux matériels

2 - Propagation d'ondes planes sinusoïdales dans un milieu matériel illimité (vide de charges)

Equation de propagation (milieu neutre (ρ=0)) de conductivité non nulle

Hors des sources dans un milieu l.h.i

$$div\vec{E} = 0$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$

$$div\vec{B} = 0$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{H} = \gamma\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

1. Etablir l'équation de propagation du champ électrique $\underline{\vec{E}}$

IV – Milieux matériels

2 - Propagation d'ondes planes sinusoïdales dans un milieu matériel illimité (vide de charges)

$$div\vec{E} = 0 \qquad div\vec{B} = 0$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \qquad \overrightarrow{rot}\vec{H} = \gamma\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{E}) = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{rot}\vec{H}$$

$$div\vec{E} = 0 \Rightarrow \quad \Delta\vec{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \gamma\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$$

$$\Delta\vec{H} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} - \gamma\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = \vec{0}$$

↳ Equations de propagation

IV – Milieux matériels

3 - Expression du module du vecteur d'onde en fonction des caractéristiques du milieu

$$\Delta\vec{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \gamma\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$$

$$\Delta\vec{H} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} - \gamma\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = \vec{0}$$

$$\Delta\vec{E} = \begin{vmatrix} \Delta E_x = \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \\ \Delta E_y = \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \\ \Delta E_z = \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \end{vmatrix}$$

Rappel (déjà vu)

$$\Delta\vec{E} = \begin{cases} \Delta E_x = \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \\ \Delta E_y = \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \\ \Delta E_z = \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \end{cases}$$

Considérons $\vec{E} = \vec{E}(x,t) \Rightarrow \Delta\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} \end{cases}$

Exemple avec : $\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 \exp\, j(\omega t - kx)$

Equation de propagation : $\Delta\vec{E} - \varepsilon\mu\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \gamma\mu\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$

$$\Rightarrow -k^2\underline{\vec{E}} + \omega^2\varepsilon\mu\underline{\vec{E}} - j\omega\gamma\mu\underline{\vec{E}} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow k^2 = \varepsilon\mu\omega^2 - j\omega\gamma\mu = \mu\omega^2(\varepsilon - \frac{j\gamma}{\omega})$$

$$\Rightarrow k^2 = \mu\omega^2(\varepsilon - \frac{j\gamma}{\omega})$$

$$\Rightarrow k^2 = \mu\omega^2\varepsilon(1 - \frac{j\gamma}{\varepsilon\omega})$$

↳ Vecteur d'onde

IV – Milieux matériels

4 - Cas d'un diélectrique parfait (idéal)

On a établi pour un milieu vide de charges : $\Delta\vec{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \gamma\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$

Cas d'un diélectrique parfait (γ=0) : $\overrightarrow{rot}\underline{\vec{H}} = j\omega\varepsilon\underline{\vec{E}}$

Isolant idéal γ = 0 et ε constant $\Rightarrow \Delta\vec{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$

↳ $\Delta\vec{E} + \varepsilon\mu\omega^2\vec{E} = \vec{0}$

Vitesse de propagation : $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

$k = \frac{\omega}{v} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ Si $\mu = \mu_0 \Rightarrow v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$

Indice optique : $n = \frac{c}{v} \Rightarrow n = \sqrt{\varepsilon_r}$ Déjà vu

IV – Milieux matériels

5 - Cas d'un diélectrique imparfait (milieu à pertes)

Milieu soumis à des courants (conduction, polarisation) qui entraînent des pertes (effet Joule) et donc $\gamma \neq 0$ (i.e γ faible)

$$\overrightarrow{rot}\underline{\vec{H}} = \underline{\vec{J}} + \varepsilon \frac{d\underline{\vec{E}}}{dt} \qquad \Rightarrow \overrightarrow{rot}\underline{\vec{H}} = \gamma \underline{\vec{E}} + j\omega\varepsilon \underline{\vec{E}}$$

ou encore : $$\overrightarrow{rot}\underline{\vec{H}} = (\gamma + j\omega\varepsilon)\underline{\vec{E}} = (\varepsilon - j\frac{\gamma}{\omega})\, j\omega \underline{\vec{E}}$$

Equation équivalente à : $$\overrightarrow{rot}\underline{\vec{H}} = (\varepsilon - j\frac{\gamma}{\omega})\frac{d\underline{\vec{E}}}{dt} = \underline{\varepsilon_c}\frac{d\underline{\vec{E}}}{dt}$$

en posant : $\underline{\varepsilon_c} = (\varepsilon - j\frac{\gamma}{\omega})$ permittivité complexe

IV – Milieux matériels

5 - Cas d'un diélectrique imparfait (milieu à pertes)

❖ Cela revient à remplacer la permittivité réelle d'un diélectrique parfait par une permittivité complexe :

$$\underline{\varepsilon}_c = \varepsilon' - j\varepsilon''$$

Avec : $\varepsilon'' = \dfrac{\gamma}{\omega}$ et $\varepsilon' = \varepsilon$

❖ Angle de perte δ_c et tangente de perte

$$\tan\delta_c = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \frac{\gamma}{\varepsilon\omega}$$

Les pertes sont d'autant plus grandes que ε'' est grand.

IV – Milieux matériels

5 - Cas d'un diélectrique imparfait (milieu à pertes)

On a établi pour un milieu vide de charges : $\Delta\vec{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \gamma\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$

$\Rightarrow -k^2\underline{\vec{E}} + \omega^2\varepsilon\mu\underline{\vec{E}} - j\omega\gamma\mu\underline{\vec{E}} = \vec{0}$ $\quad \Rightarrow k^2 = \mu\omega^2\varepsilon(1-\frac{j\gamma}{\varepsilon\omega})$ ou encore $k^2 = \mu\omega^2\underline{\varepsilon}_c$

Dans un diélectrique imparfait, une OPPS présente un vecteur d'onde complexe.

On a : $\underline{k} = a - jb$ où a et b sont des réels positifs issus de la relation de dispersion.

On cherche des solutions planes de la forme : $\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 \exp j(\omega t - \vec{k}.\vec{r})$

Soit pour une onde se propageant suivant Ox : $\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 \exp j(\omega t + jbx - ax)$

$\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 e^{-bx} e^{j(\omega t - ax)}$

Remarques :

$\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 e^{-bx} e^{j(\omega t - ax)} \Rightarrow \underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 e^{-bx} e^{j\omega(t-\frac{a}{\omega}x)}$

Cas traité en TD (thème 1, exo 2)

- Atténuation en e^{-bx} (absorption)
- La vitesse de phase v_φ dépend de ω : $v_\varphi = \frac{\omega}{a(\omega)}$

IV – Milieux matériels

6 - Cas d'un très bon isolant

Pour les très bons isolants : $\frac{\gamma}{\varepsilon\omega} << 1$

Exemple :

Pour le polyéthylène entre 50Hz et 1GHz, $\varepsilon = 2{,}3\varepsilon_0$ et $2\times10^{-4} < \tan\delta_c < 3\times10^{-4}$

$$\frac{\gamma}{\varepsilon\omega} = \tan\delta_c \approx 10^{-4}$$

Donc : $$\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = j\varepsilon\mu_0\omega\left(1 - j\frac{\gamma}{\varepsilon\omega}\right)\vec{E} \approx j\varepsilon\mu_0\omega\vec{E}$$

C'est le cas d'un diélectrique sans pertes

NB : Le caractère isolant ou conducteur peut dépendre de la fréquence

IV – Milieux matériels

7 - Cas d'un milieu conducteur parfait

❖ Cas d'un conducteur parfait ($\gamma \to \infty$)

Aucune charge extérieure en volume ($\rho = 0$) mais il peut exister des charges en surface (σ)

$\vec{E}_{int} = \vec{0}$ et $\vec{B}_{int} = \vec{0}$

Une onde électromagnétique ne pénètre pas un conducteur parfait (miroir), elle est réfléchie : $\vec{E} = \vec{0}$, $\vec{B} = \vec{0}$, $\vec{j} = \vec{0}$, $\vec{k} = \vec{0}$ dans le conducteur.

IV – Milieux matériels

8 - Cas d'un milieu bon conducteur

Un bon conducteur est caractérisé par une grande conductivité γ

Pour le cuivre : $\gamma = 5{,}9.10^{7}\, S/m$ $\qquad \varepsilon = \varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}\, F/m$

Pour f= 50 Hz : $\dfrac{\gamma}{\varepsilon\omega} = 2{,}1.10^{16}$ $\qquad$ Pour f= 100 GHz : $\dfrac{\gamma}{\varepsilon\omega} = 10^{6}$

Dans tous les cas $\gamma >> \varepsilon\omega$ ou encore $\dfrac{\gamma}{\varepsilon\omega} >> 1$

Donc : $\overrightarrow{rot}\underline{\vec{B}} = j\varepsilon\mu_0\omega(1 - j\dfrac{\gamma}{\varepsilon\omega})\underline{\vec{E}} \approx \gamma\mu_0\underline{\vec{E}}$ $\qquad$ ou $\qquad \overrightarrow{rot}\vec{H} \approx \gamma\vec{E}$

On peut aussi utiliser la permittivité complexe :

$$\underline{\varepsilon_c} = \varepsilon - j\frac{\gamma}{\omega} \Rightarrow \overrightarrow{rot}\underline{\vec{H}} \approx \underline{\varepsilon_c}\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t} \approx -j\frac{\gamma}{\omega}\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t}$$

même à hautes fréquences

$\dfrac{\gamma}{\varepsilon\omega} >> 1$ L'équation de propagation s'écrit :

$$\Delta\underline{\vec{E}} - \underline{\varepsilon_c}\mu_0\frac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \vec{0} = \Delta\underline{\vec{E}} + j\frac{\gamma}{\omega}\mu_0(-\omega^2\underline{\vec{E}})$$

$$\Rightarrow \Delta\underline{\vec{E}} - j\gamma\mu_0\omega\underline{\vec{E}} = \vec{0}$$

avec $\mu = \mu_0$

IV – Milieux matériels

8 - Cas d'un milieu bon conducteur

❖ Effet de peau

La recherche de solutions d'ondes planes de la forme :

$\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 \exp j(\omega t - \vec{k}.\vec{r})$ conduit à l'équation de dispersion : $\underline{k}(\omega)$

$$\Delta\underline{\vec{E}} = -\underline{k}^2\underline{\vec{E}} \Rightarrow \underline{k}^2 = j\omega\mu_0\gamma \;\; ; \;\; \underline{k} = \alpha - j\beta \;\; \text{complexe}$$

$$\underline{k}^2 = \omega\mu_0\gamma e^{j\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \underline{k} = \sqrt{\omega\mu_0\gamma}\, e^{j\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \underline{k} = \sqrt{\frac{\omega\mu_0\gamma}{2}}.(1+j)$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = \frac{1}{\delta} \;\; \text{si on pose} \;\; \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\gamma}}$$

IV – Milieux matériels

8 - Cas d'un milieu bon conducteur

❖ Effet de peau

Exemple : considérons la direction de propagation suivant Ox

$$\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 \exp[\, j(\omega t - (\alpha - j\beta)x)] \qquad \Rightarrow \underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 \exp\, j(\omega t - \alpha x)\exp(-\beta x)$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 \exp\, j(\omega t - \frac{x}{\delta}).\exp(-\frac{x}{\delta}) \quad \Rightarrow \quad \underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 \exp(-\frac{x}{\delta}) \times \exp\, j(\omega t - \frac{x}{\delta})$$

$\exp(-\frac{x}{\delta})$: atténuation

$\frac{x}{\delta}$: dispersion

δ : profondeur de pénétration ou encore épaisseur de peau

Exemple : cas du cuivre f = 10GHz

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{2\pi 10^{10}.4\pi 10^{7} 6.10^{7}}} \approx 0.6\mu m \qquad v_\varphi = \omega\delta << c$$

IV – Milieux matériels

9 – Puissance dissipée par effet Joule dans un matériau conducteur

L'onde est absorbée par le milieu conducteur en perdant de l'énergie dissipée par effet Joule.

Etant donné un volume V du conducteur, la puissance volumique dissipée s'écrit :

$$\frac{dP}{dV} = \vec{j}.\vec{E} = \gamma E^2 \Rightarrow P = \iiint_V \gamma E^2 dV$$

Le calcul de P nécessite de prendre l'expression réelle de E ou bien :

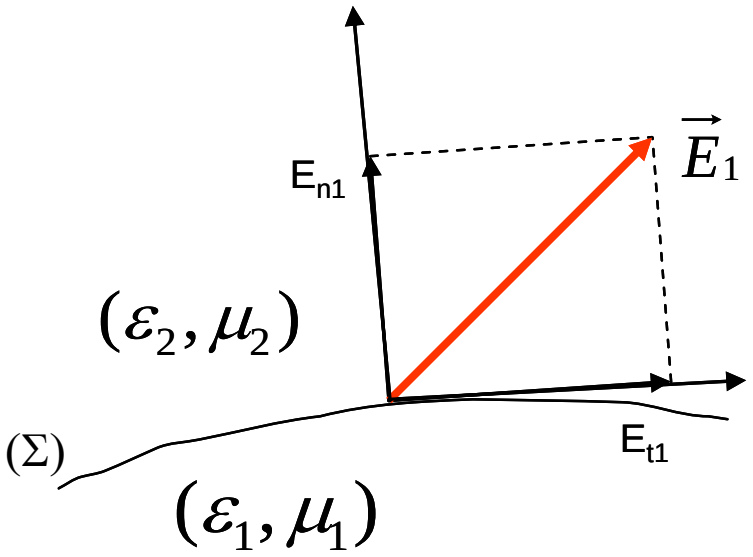
$$\langle P \rangle = \frac{\gamma}{2} \iiint_V \underline{\vec{E}}.\underline{\vec{E}}^* \, dV$$ en complexe

IV – Milieux matériels

10 – Conditions à l'interface entre deux milieux

Condition de passage sur les champs à l'interface entre deux milieux l.h.i

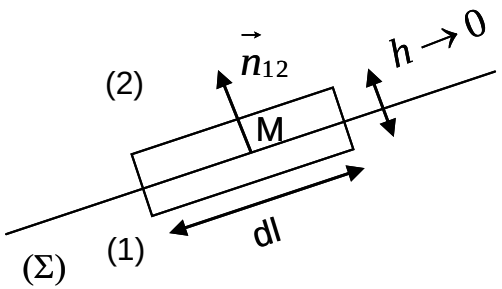
Soient deux milieux différents l.h.i séparés par une surface (Σ). De part et d'autre de l'interface, les champs $(\vec{E},\vec{D},\vec{B},\vec{H})$ prennent des valeurs différentes (indices 1 et 2) tout en satisfaisant aux équations de Maxwell. Ceci se traduit par des relations de passage satisfaites par les projections des champs sur la normale (indice n) (composante normale) et sur le plan tangent à (Σ) au point considéré (indice t) (composante tangentielle).



IV – Milieux matériels

10 – Conditions à l'interface entre deux milieux

Relations de passage (relations de continuité)



❖ Composante tangentielle de $\vec{E}$: E_t

D'après Stokes : $\oint_C \vec{E}.\vec{dl} = \iint_S \overrightarrow{rot}\vec{E}.\vec{n}.dS$ Avec : $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \oint_{(C)} \vec{E}.\vec{dl} \approx E_{t2}dl - E_{t1}dl = -\frac{\partial}{\partial t}\iint \vec{B}.\vec{n}dS = 0 \quad (dS \to 0)$$

$E_{t1} = E_{t2}$ ou $\vec{n}_{12} \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0}$ en M de la surface

⇒ La composante tangentielle E_t de $\vec{E}$ est continue

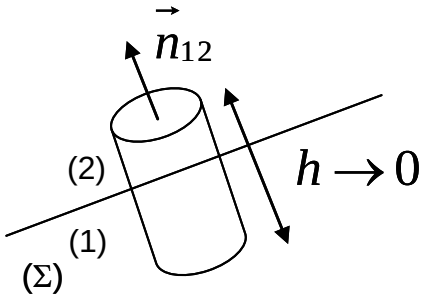
⚠ La continuité n'est pas vérifiée pour $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ car on a alors $D_{t1}/\varepsilon_1 = D_{t2}/\varepsilon_2$

IV – Milieux matériels

10 – Conditions à l'interface entre deux milieux

Relations de passage (relations de continuité)

❖ Composante normale de $\vec{B}$ ou $\vec{H}$: B_n ou H_n



Théorème d'Ostrogradsky :

$$\iiint div\vec{F}\,dV = \oiint_{S(\,fermée)} \vec{F}.\vec{n}.dS$$

Surface fermée infinitésimale $\Rightarrow div\vec{B} = 0 \Rightarrow B_{n1} = B_{n2}$

ou $\vec{n}_{12}.(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad B_{n1} = B_{n2}$

$\Rightarrow$ La composante normale B_n de $\vec{B}$ est continue

Dans le cas d'un milieu l.h.i : $\vec{n}_{12}.\left(\mu_2 \overrightarrow{H_2} - \mu_1 \overrightarrow{H_1}\right) = 0$

Mais comme : $\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu \approx \mu_0 \quad \Rightarrow \quad H_{n1} = H_{n2}$

IV – Milieux matériels

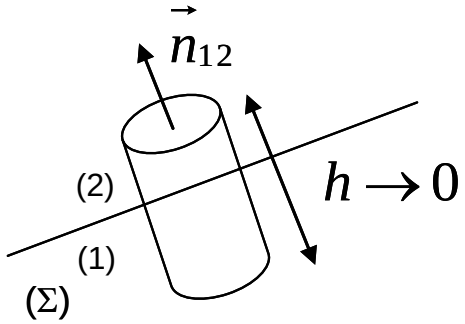
10 – Conditions à l'interface entre deux milieux

Relations de passage (relations de continuité)

❖ Composante normale de $\vec{E}$ et $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

Comme dans le cas précédent pour B et H, on fait tendre h vers zéro ($h \to 0$)

Comme : $div\vec{D} = \rho \Rightarrow \rho \to \sigma$



$$\vec{n}_{12}.(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma \quad \Rightarrow \quad D_{n2} - D_{n1} = \sigma \quad \Rightarrow \varepsilon_2 E_{n2} - \varepsilon_1 E_{n1} = \sigma$$

$\Rightarrow$ La composante normale E_n de $\vec{E}$ (ou D_n de $\vec{D}$) est discontinue

IV – Milieux matériels

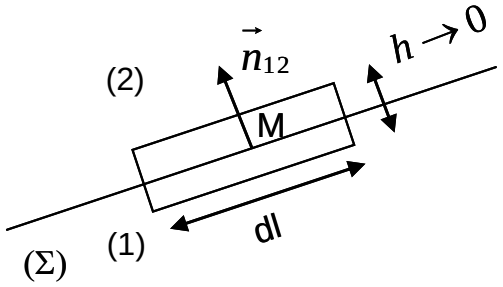
10 – Conditions à l'interface entre deux milieux

Relations de passage (relations de continuité)

❖ Composante tangentielle de $\vec{B}$ ou $\vec{H}$: B_t ou H_n

On a : $\overrightarrow{rot}\vec{H} = \vec{j} + \varepsilon \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ et $\oint_C \vec{H}.\vec{dl} = \iint_S \overrightarrow{rot}\vec{H}.\vec{n}.dS$

Quand $h \to 0$ $\quad \vec{j} \to \vec{j}_S$



$$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{j}_S$$

$$\vec{H}_2 - \vec{H}_1 = \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{12} \quad \text{ou} \quad H_{t2} - H_{t1} = j_S \quad \text{ou} \quad B_{t2} - B_{t1} = j_S / \mu_0$$

$\Rightarrow$ La composante tangentielle H_t de $\vec{H}$ (ou B_t de $\vec{B}$) est discontinue

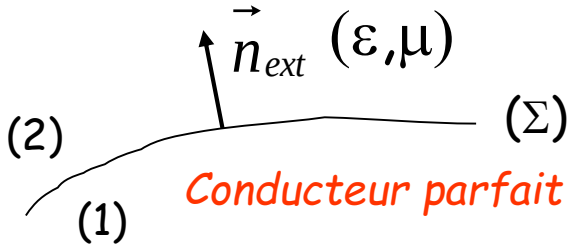
IV – Milieux matériels

10 – Conditions à l'interface entre deux milieux

Relations de passage (relations de continuité)

❖ Cas de l'interface entre un milieu et un conducteur parfait

Dans le conducteur parfait (1) : $\vec{E}_1, \vec{B}_1, \vec{D}_1, \vec{H}_1$ sont nuls (de même que ρ_1 et $\vec{j}_S$)



$\vec{n}_{ext} \wedge \vec{E} = \vec{0}$ où $\vec{E}, \vec{B}, \vec{H}$ sont les champs dans le milieu (2) au voisinage immédiat de (Σ).

$\vec{n}_{ext}.\vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{n}_{ext}.\vec{H} = 0$ sur la surface côté milieu : $E_t = 0$ et $H_n = 0$

$\Rightarrow$ Dans le milieu, sur le conducteur, E est normal au conducteur, H est tangentiel

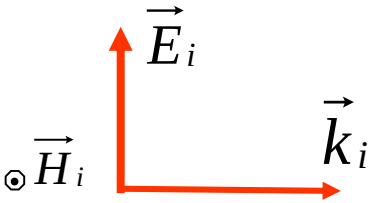
IV – Milieux matériels

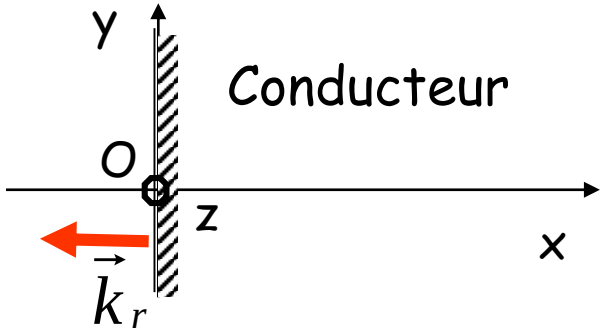
10 – Conditions à l'interface entre deux milieux

Réflexion d'une onde plane sur un plan conducteur parfait

1. Incidence normale : ondes stationnaires

Une OPPS polarisée rectilignement (E_i // plan conducteur) arrive sous incidence normale sur ce plan





En x =0 $\vec{E}_t = \vec{0}$ Ce sera nécessairement une onde réfléchie (l'onde ne peut pas pénétrer dans le conducteur) telle que :

$$[(\vec{E}_i + \vec{E}_r)_t]_{x=0,\forall y,z} = \vec{0}$$ Conditions aux limites sur le conducteur

$$\underline{\vec{E}}_i = E_0 \vec{e}_y \exp\, j(\omega t - k_i x)$$

$$\underline{\vec{E}}_r = E_{0r} \vec{e}_y \exp\, j(\omega t - k_r x)$$

$\vec{E}_i$ et $\vec{E}_r$ se réduisent ici à leur composante tangentielle, mais $\vec{E}_r$ se propage en sens inverse : $k_r = -k_i$

IV – Milieux matériels

10 – Conditions à l'interface entre deux milieux

Réflexion d'une onde plane sur un plan conducteur parfait

1. Incidence normale : ondes stationnaires (suite)

$$k = k_i = -k_r = \frac{\omega}{v} \qquad (v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}})$$

Ici donc $E_0 + E_{0r} = 0$ $\Rightarrow \underline{\vec{E}}_r = -E_0 \vec{e}_y \exp j(\omega t + kx)$ en un point quelconque du milieu (x < 0).

L'onde résultante a donc un champ électrique : $\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r$

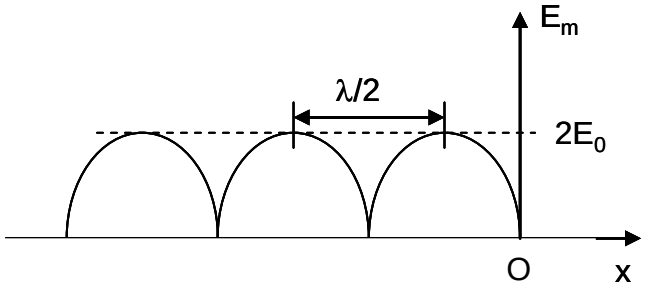
$$\underline{\vec{E}}(x,t) = E_0 e^{j\omega t}[e^{-jkx} - e^{+jkx}]\vec{e}_y$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{E}} = -2jE_0 \sin kx.e^{j\omega t}\vec{e}_y = 2E_0(\sin kx).e^{j(\omega t - \pi/2)}\vec{e}_y$$

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \qquad -j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

En notation réelle : $\vec{E}(x,t) = 2E_0\vec{e}_y|\sin kx|\sin\omega t = E_m(x).(\sin\omega t)\vec{e}_y$

où $E_m(x)$ est l'amplitude



Onde stationnaire

IV – Milieux matériels

10 – Conditions à l'interface entre deux milieux

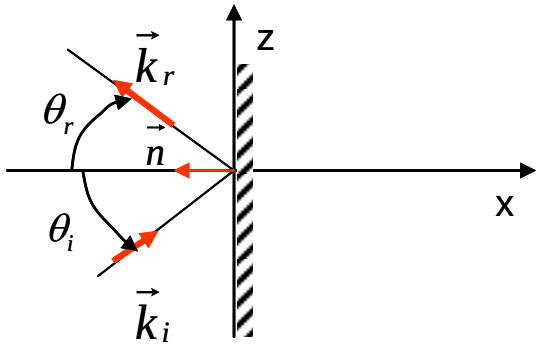
Réflexion d'une onde plane sur un plan conducteur parfait

2. Incidence oblique :

2.a - Lois de Descartes

Les conditions aux limites imposent l'existence d'une onde réfléchie.
Les lois énoncées par Descartes pour la réflexion sont satisfaites.

❖ Plan d'incidence : le vecteur d'onde $\vec{k}_r$ de l'onde réfléchie appartient au « plan d'incidence » : $(\vec{k}_i, \vec{n})$



❖ La direction de propagation de l'onde réfléchie est symétrique de celle de l'onde incidente par rapport à Ox.

Si : $\vec{k}_i = k \begin{vmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ \sin\theta \end{vmatrix}$ $\Rightarrow \vec{k}_r = k \begin{vmatrix} -\cos\theta \\ 0 \\ \sin\theta \end{vmatrix}$ où $k = \dfrac{\omega}{v}$

où $\theta = \theta_i = \theta_r$

où $k = \left|\vec{k}_i\right| = \left|\vec{k}_r\right|$

IV – Milieux matériels

10 – Conditions à l'interface entre deux milieux

Réflexion d'une onde plane sur un plan conducteur parfait

2. Incidence oblique :

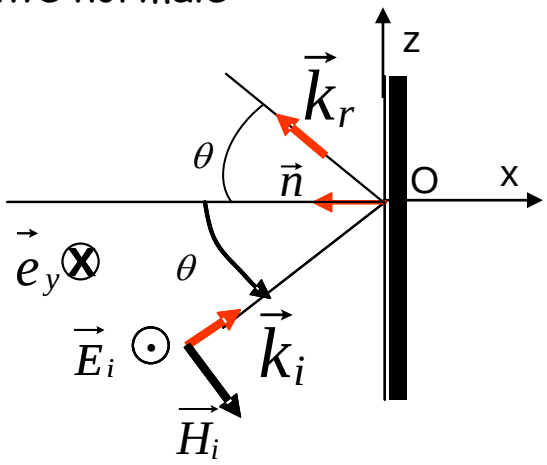
2.b – Exemple : $\vec{E}$ perpendiculaire au plan d'incidence $(\vec{k}_i, \vec{n})$

La réflexion est la conséquence des conditions aux limites imposées aux champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ ($E_t = 0$; $B_n = 0$ sur le conducteur).
Elle dépend du champ électromagnétique incident. On prend ici l'exemple où $\vec{E}_i$ est perpendiculaire au plan d'incidence.
En arrivant sur l'interface, $\vec{E}_i$ est tangentiel ($\vec{H}_i$ a une composante normale et une composante tangentielle).

$$\vec{E}_i = -E_{0i}\vec{e}_y \exp j\left[\omega t - k\left(x\cos\theta + z\sin\theta\right)\right]$$

$$\vec{E}_r = -E_{0r}\vec{e}_y \exp j\left[\omega t - k\left(-x\cos\theta + z\sin\theta\right)\right]$$

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r$$



Conditions aux limites

En x = 0 : $E_t = 0 \quad \forall\, x, y, z, t$ or $\vec{E} \equiv \vec{E}_t \Rightarrow \vec{E}(x=0) = \vec{0}$

$$\Rightarrow E_{0i}e^{j(\omega t - kz\sin\theta)} + E_{0r}e^{j(\omega t - kz\sin\theta)} = 0$$

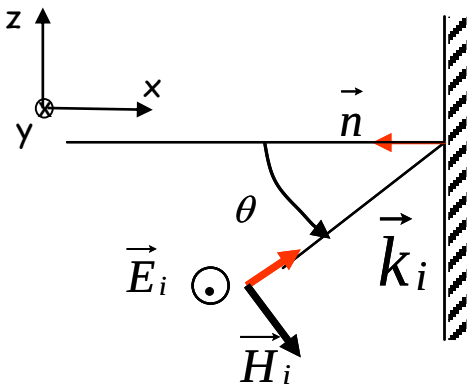
$$\Rightarrow E_{0i} + E_{0r} = 0 \qquad \Rightarrow E_{0r} = -E_{0i} = -E_0$$

IV – Milieux matériels

10 – Conditions à l'interface entre deux milieux

Réflexion d'une onde plane sur un plan conducteur parfait

2.c - Onde résultante non plane. Vitesse de phase



En un point quelconque du ½ espace x < 0 :

$$\vec{E} = -E_0 \vec{e}_y e^{j(\omega t - kz\sin\theta)}\left[e^{-jkx\cos\theta} - e^{+jkx\cos\theta}\right]$$

$$\vec{E} = 2jE_0 \vec{e}_y \sin(kx\cos\theta)\cdot e^{j(\omega t - kz\sin\theta)}$$

En notation réelle : $\vec{E} = 2E_0 \vec{e}_y \sin(kx\cos\theta)\sin(\omega t - kz\sin\theta)$

L'onde est non plane et non stationnaire pure : il n'y a pas séparation complète des variables espace et temps ; onde sinusoïdale dans la direction normale au plan, mais la propagation se fait suivant Oz. Non plane car $E_m(x)$ est dans un plan perpendiculaire à la direction apparente de propagation :

$$E_m(x) = 2E_0 \sin(kx\cos\theta)$$

❖ Vitesse de phase : $(\omega t - kz\sin\theta) = \omega(t - \frac{k\sin\theta}{\omega}z)$

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k\sin\theta} \quad \Rightarrow v_\varphi = \frac{v}{\sin\theta} > v \quad \text{où } v = \frac{\omega}{k} \qquad \omega = kv_\varphi \sin\theta \;\Rightarrow v_g = \frac{d\omega}{dk} = v_\varphi \sin\theta < v_\varphi$$

❖ En outre, onde non TEM ($H_z \neq 0$) ($\vec{H}$ n'est pas $\perp$ au plan d'incidence).

❖ Discontinuités : σ liée à une discontinuité de la composante normale de $\vec{E}$ en x=0. Or : $E_{ix} = E_{rx} = 0 \Rightarrow \sigma = 0$

Pour $\vec{E}$ // au conducteur $\Rightarrow \sigma = 0$

Pour $H_z \neq 0 \Longrightarrow$ courant surfacique $\vec{J}_S = \vec{H} \wedge (-\vec{e}_x)$ c'est-à-dire : $\vec{J}_S = -J_S \vec{e}_y$

III. Ondes électromagnétiques guidées

I – Guide conducteur plan

1 – Notion de guidage
2 – Géométrie du guide
3 – Conditions aux limites

II – Mode TEM

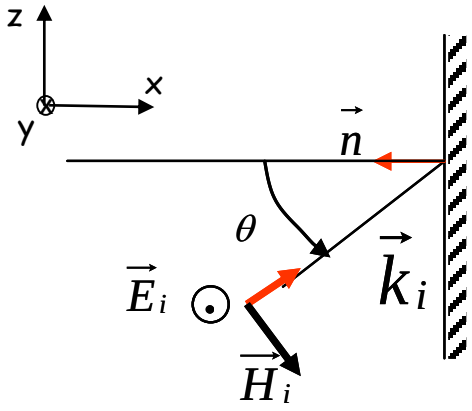
III – Mode TE

1 – E perpendiculaire au plan d'incidence (xOz)
2 – Notion de mode
3 – Notion de coupure
4 – Champ électromagnétique des modes TE
5 – Composante longitudinale de H
6 – Caractéristiques de la propagation en mode TE : coupure, dispersion
7 – Vitesses de phase et de groupe

I – Guide conducteur plan

1. Notion de guidage

Dans l'exemple simple précédent, l'onde est « guidée » dans la direction Oz mais l'énergie est répartie dans tout le demi-espace x < 0. Si on restreint encore cet espace par d'autres plans conducteurs, on « guidera » l'énergie dans la direction souhaitée.



Position du problème : Solutions de l'équation de propagation satisfaisant aux conditions aux limites.

Toutes les « solutions possibles » sont telles que :

- Elles satisfont à l'équation de propagation (cœur du guide assimilé à un diélectrique parfait) :

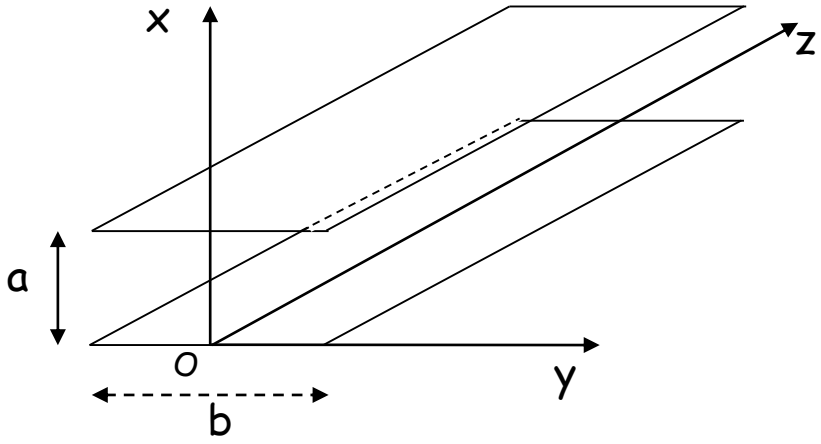
$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

- Seules sont valides celles qui satisfont aux conditions aux limites.

I – Guide conducteur plan

2. Géométrie du guide

Ondes guidées par deux plans conducteurs parallèles illimités

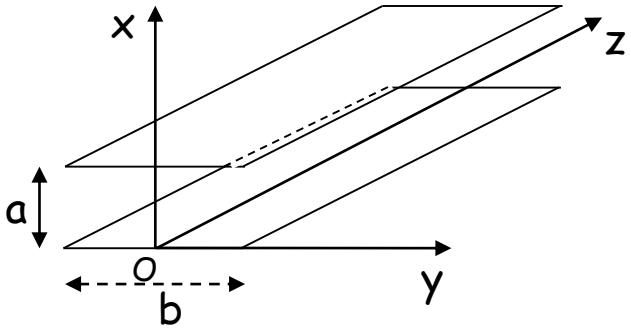


Les plans sont illimités dans la direction Oz (direction de propagation apparente) et suffisamment proches (b >> a) pour qu'ils soient considérés comme illimités dans la direction Oy.

⟹ solutions invariantes en y et ne dépendant pas de y.

I – Guide conducteur plan

3. Conditions aux limites



i) $E_{//}$ aux plans :

$\Longrightarrow E_z\,(x = 0) = E_y\,(x = 0) = 0 \quad \forall y, z, t$

$\Longrightarrow E_z\,(x = a) = E_y\,(x = a) = 0 \quad \forall y, z, t$

ii) $H_{\perp}$ aux plans

$\Longrightarrow H_x(0) = H_x(a) = 0 \quad \forall y, z, t$

Les discontinuités de $E_{\perp}$ et $H_{//}$ correspondent aux distributions surfaciques.

I – Guide conducteur plan

Problème

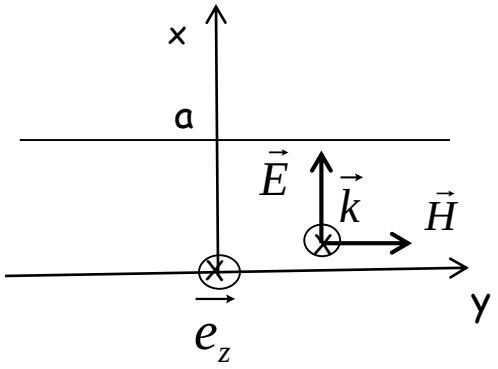
Existe-t-il des solutions à structure plane satisfaisant aux conditions aux limites ?

Solution du type : $\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 \exp\, j(\omega t - \beta z)$ Avec : $v = \dfrac{\omega}{\beta}$

Si de telles ondes existent, elles doivent être TEM (Transverse, Electrique, Magnétique).

II - Mode TEM

Une telle solution n'est compatible que si elle satisfait « automatiquement » aux conditions aux limites.

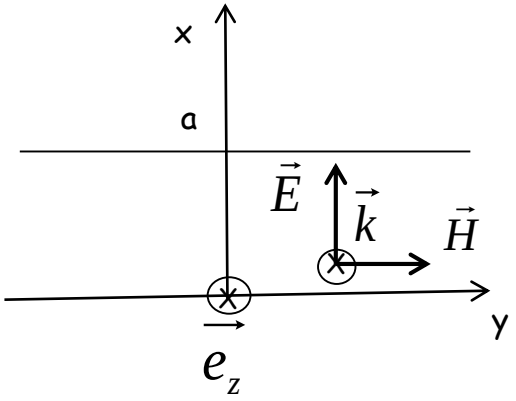


Il suffit de polariser les champs pour que $\vec{E}$ soit perpendiculaire aux 2 plans conducteurs et $\vec{H}$ parallèle à ces deux plans (alors $E_{//}$ est nulle partout et sur les conducteurs, de même $H_{\perp} = 0$ partout.

➡ $\vec{E}$ perpendiculaire aux plans conducteurs

Solution du type : $\underline{\vec{E}} = E_0 \vec{e}_x \exp j(\omega t - \beta z)$

II - Mode TEM



Expression de $\vec{H}$?

Rappel

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \Lambda \vec{E}}{\omega} \quad \Rightarrow \frac{E_0}{B_0} = \frac{\omega}{k} = v \quad \Rightarrow \frac{E_0}{\mu_0 H_0} = v \Rightarrow H_0 = \frac{E_0}{\mu_0 v}$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{H}} = \frac{E_0}{\mu_0 v} \vec{e}_y \exp j(\omega t - \beta z) \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{\omega}{v}$$

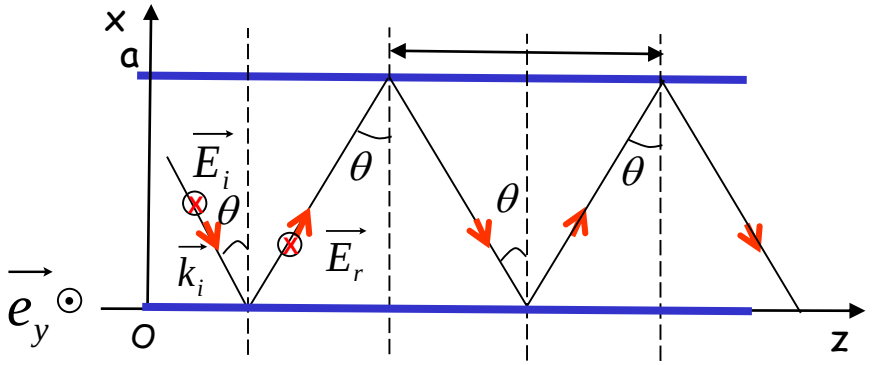
0 < x < a : C'est une onde plane, mais limitée dans l'espace

➡ Mode TEM

III - Mode TE

1. $\vec{E}$ perpendiculaire au plan d'incidence (xOz)

   ⇒ **Modélisation par une onde en « zigzag »**



Essayons de voir si la solution obtenue dans le cas du guidage par un plan peut encore exister dans cette nouvelle structure (onde non plane) ; $\vec{E}$ est donc parallèle aux plans conducteurs, et perpendiculaire au « plan d'incidence ».
On peut alors imaginer que, par réflexions successives sur les deux plans, l'onde se propage suivant Oz.

Une onde $\vec{E}_i$ se réfléchit en x = 0 $\Rightarrow \vec{E}_r$ tel que :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_i + \underline{\vec{E}}_r = 2jE_0\vec{e}_y \sin(kx\cos\theta)\exp\left[j(\omega t - kz\sin\theta)\right]$$ (Déjà vu)

III - Mode TE

2. Notion de mode

Il y a « guidage » si toutes les réflexions successives se superposent de sorte que l'on obtient la solution précédente. Pour cela, il suffit que la solution vérifie les conditions aux limites sur le deuxième plan conducteur.

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_i + \underline{\vec{E}}_r = 2\,jE_0\vec{e}_y \sin(kx\cos\theta)\exp\, j(\omega t - kz\sin\theta)$$

En x = a : $E \equiv E_{//} \Rightarrow \sin(ka\cos\theta) = 0$ soit $\cos\theta_m = \dfrac{m\pi}{ka}$ $m = 1, 2, \ldots$

- Il existe une suite illimitée de valeurs discrètes possibles pour θ.
- Chaque valeur de θ correspond à un « mode » appelé ici modes TE ($\vec{E}$ est perpendiculaire à la direction de propagation). On verra que $\vec{H}$ ne l'est pas.
- Propagation de l'énergie suivant Oz de valeur moyenne : $< R_x >$ = 0 (cf. TD).
- L'onde en « zigzag » se propage avec une vitesse $v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ alors que l'onde TE résultante a une vitesse de phase : $v_\varphi = \dfrac{v}{\sin\theta} > v$ (Déjà vu)

III - Mode TE

3. Notion de coupure

Si $\theta = 0$, la réflexion de l'onde incidente est normale ; Onde sinusoïdale pure suivant Ox. Il n'y a pas de propagation suivant Oz.

$$\langle R_z \rangle = 0 = \langle R_x \rangle$$

Dans ce cas, $v_\varphi = \dfrac{v}{\sin\theta} \to \infty$; la phase est la même en tout point du milieu ; il n'y a plus propagation.

4. Champ électromagnétique des modes TE

Champ $\vec{E}$

La relation obtenue pour $\vec{E}$ dans les modes TE fait intervenir la condition sur θ.

III - Mode TE

Recherche de solutions : $E_0(x)\exp[\,j(\omega t - k_g z)]$

On peut exprimer les champs directement à l'aide des variables d'espace en cherchant des solutions : $\underline{\vec{E}} = E_m(x)\vec{e}_y \exp\, j(\omega t - k_g z)$ où k_g représente la constante de propagation guidée. Elle satisfait à l'équation de propagation en tenant compte des conditions aux limites.

$$\Delta\underline{\vec{E}} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Rappel : $\underline{\vec{E}} \begin{vmatrix} 0 \\ \underline{E}_y(x,z) \\ 0 \end{vmatrix}$

En injectant la forme de solution dans l'équation de propagation :

$$\Delta\underline{\vec{E}} = \frac{\partial^2 \underline{E}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_y}{\partial z^2} = \left[\frac{d^2 E_m}{dx^2} - k_g^2 E_m\right]\exp\, j(\omega t - k_g)\vec{e}_y$$

Et : $\dfrac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = -\omega^2 E_m \exp\, j(\omega t - k_g z)$

$$\Delta\underline{\vec{E}} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \vec{0} \qquad \Rightarrow \frac{d^2 E_m(x)}{dx^2} + \left(\frac{\omega^2}{v^2} - k_g^2\right)E_m(x) = 0$$

III - Mode TE

$$\frac{d^2E_m(x)}{dx^2} + \left(\frac{\omega^2}{v^2} - k_g^2\right)E_m(x) = 0$$

Equation différentielle du 2nd ordre

La forme de solution est valide si et seulement si :

- $E_m(x)$ est solution de l'équation différentielle ;
- $E_m(x)$ est telle que $\vec{E}$ satisfait aux conditions aux limites, c'est-à-dire : $E_y = E_{tg} = 0$ en x = 0 et x = a.

Résolution de l'équation ?

Equation caractéristique : $r^2 + \left(\frac{\omega^2}{v^2} - k_g^2\right) = 0$

$$\Rightarrow r^2 = -\left(\frac{\omega^2}{v^2} - k_g^2\right)$$

III - Mode TE

Deux cas à envisager pour : $r^2 = -(\frac{\omega^2}{v^2} - k_g^2)$

i) $\frac{\omega^2}{v^2} - k_g^2 < 0 \quad \Rightarrow \frac{\omega}{v} < k_g$ Alors : $E_m(x) = Ae^{rx} + Be^{-rx}$ où r est réel.

Compte tenu de la première condition aux limites CL1, $(E_m(x=0)=0)$

$\Rightarrow A = -B$ Mais : $(E_m(x=a) \neq 0)$; donc solution invalide.

ii) $\frac{\omega^2}{v^2} - k_g^2 > 0 \quad \Rightarrow \frac{\omega}{v} > k_g$ Posons : $\gamma^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - k_g^2 > 0$ (γ réel)

Alors: $\underline{E}_m(x) = Ae^{j\gamma x} + Be^{-j\gamma x}$

(Conditions aux limites 1) : en x = 0 $E_m = 0 \Leftrightarrow A = -B$

$\Rightarrow \underline{E}_m(x) = A(e^{j\gamma x} - e^{-j\gamma x})$; comme $\frac{e^{j\gamma x} - e^{-j\gamma x}}{2j} = \sin \gamma x$

$$\Rightarrow E_m(x) = 2jA\sin(\gamma x)$$

III - Mode TE

$$E_m(x) = 2jA\sin(\gamma x)$$

La condition aux limites 2 peut être satisfaite si :

$$E_m(a) = 0 \quad \Rightarrow \sin(\gamma a) = 0 \qquad \Rightarrow \gamma a = m\pi$$

Donc si : $\gamma = \dfrac{m\pi}{a}$ avec m =1, 2, 3 …. (entier)

$$\Rightarrow \underline{E}_m(x) = 2jA\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)$$

$$j = e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Finalement : $$\vec{\underline{E}}(x,z,t) = E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\exp\left[j\left(\omega t - k_g z + \frac{\pi}{2}\right)\right]\vec{e_y}$$

- Les solutions valides forment une suite discrète (m entier) infinie.
- Chaque solution valide est un mode de propagation.
- $\vec{E}$ est transversal : modes TE : Numérotation TEm

III - Mode TE

5. Composante longitudinale de $\vec{H}$

$$\underline{\vec{E}}(x,z,t) = E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\exp\left[j\left(\omega t - k_g z + \frac{\pi}{2}\right)\right]\vec{e}_y$$

$$r\vec{o}t\,\underline{\vec{E}} = -j\omega\mu\underline{\vec{H}} = \begin{vmatrix} -\dfrac{\partial \underline{E}_y}{\partial z} = jk_g\underline{E}_y = -j\omega\mu\underline{H}_x \\ 0 \\ \dfrac{\partial \underline{E}_y}{\partial x} = \dfrac{m\pi}{a}E_0\cos\left(\dfrac{m\pi x}{a}\right)\exp j\left(\omega t - k_g z + \dfrac{\pi}{2}\right) = -j\omega\mu\underline{H}_z \end{vmatrix}$$

$\vec{H}$ a donc une composante transversale $\underline{H}_x$ et une composante longitudinale $\underline{H}_z$ telle que :

$$\underline{H}_z = +j\frac{m\pi E_0}{a\omega\mu}\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\exp j\left(\omega t - k_g z + \frac{\pi}{2}\right)$$

« j » indique que les deux composantes sont déphasées de $\pi/2$, donc, polarisation elliptique.

III - Mode TE

6. Caractéristiques de la propagation en mode TE : coupure, dispersion

(a) Equation de dispersion

C'est l'équation $k_g(\omega)$ liant k_g et ω. Comme : $\gamma^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - k_g^2$

et : $\gamma = \frac{m\pi}{a}$, on a : $\frac{m^2\pi^2}{a^2} = \frac{\omega^2}{v^2} - k_g^2$ pour le mode TE_m

$$\Rightarrow k_g^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - m^2\frac{\pi^2}{a^2}$$

(b) Fréquence de coupure

- Les fréquences telles que : $k_g^2 < 0$ $(\Leftrightarrow k_g = j\alpha \Rightarrow E_m e^{-\alpha z} e^{j\omega t})$ ne peuvent être propagées, c'est-à-dire si : $\omega < \frac{m\pi v}{a} = (\omega_c)_m$;
  le mode TE_m ne peut donc pas se propager dans ce cas.
- ω_c est la pulsation de coupure et $f_c = m\frac{v}{2a}$, la fréquence de coupure pour le mode m.
- Le premier mode possible est le TE_1 si : $f > f_{c_1} = \frac{v}{2a}$ il y a propagation.

III - Mode TE

(c) Longueur d'onde de coupure λ_c

Dans le guide, la période spatiale est : $\lambda_g = \dfrac{2\pi}{k_g}$

Remarque : $\dfrac{\omega}{v}$ est la constante de propagation d'une onde plane dans l'espace libre dont la longueur d'onde est : $\lambda = \dfrac{2\pi v}{\omega}$.

Comme : $k_g^2 = \dfrac{\omega^2}{v^2} - m^2 \dfrac{\pi^2}{a^2}$, l'équation de dispersion peut s'écrire :

$$\frac{4\pi^2}{\lambda_g^2} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} - m^2 \frac{4\pi^2}{4a^2} \qquad \Rightarrow \frac{1}{\lambda_g^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_c^2}$$

Avec : $\lambda_c = \dfrac{2a}{m}$ pour le mode TE_m

La condition est : $\lambda < \lambda_c$; ce qui signifie que pour le premier mode possible (m=1), $\lambda_c = 2a$.

III - Mode TE

7. Vitesse de phase ; vitesse de groupe

Le terme de propagation $\exp j(\omega t - k_g z)$ se propage à la

vitesse de phase : $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k_g} = \dfrac{v}{\sqrt{1 - m^2 \dfrac{\omega_c^2}{\omega^2}}}$ pour le mode m

Avec : $\omega_c = \omega_{c_1} = \dfrac{\pi v}{a}$ (mode TE_1)

Remarques :

- $v_\varphi > v$ (concept déjà vu)
- $v_\varphi = v_\varphi(\omega) \Rightarrow$ dispersion ; un paquet d'onde se propage

à la vitesse de groupe v_g telle que : $v_g = \dfrac{d\omega}{dk_g}$

III - Mode TE

Vitesse de groupe : $v_g = \dfrac{d\omega}{dk_g}$

En différentiant l'équation de dispersion : $k_g^2 = \dfrac{\omega^2}{v^2} - m^2 \dfrac{\pi^2}{a^2}$

On obtient : $2k_g dk_g = \dfrac{2\omega}{v^2} d\omega \Rightarrow v_g = \dfrac{d\omega}{dk_g} = \dfrac{k_g}{\omega} v^2$

Or : $\dfrac{k_g}{\omega} = \dfrac{1}{v_\varphi} \Rightarrow v_g = \dfrac{k_g}{\omega} v^2 = \dfrac{1}{v_\varphi} v^2$

Par conséquent : $v_g v_\varphi = v^2$ et : $v_g = v\sqrt{1 - m^2 \dfrac{\omega_c^2}{\omega^2}}$