A. Méthode de Bairstow

A.i. Introduction

Cette méthode qui date des années 1970 n'est adaptée qu'à la détermination des racines de fonctions polynomiales. Elle est lente et coûteuse en temps de calcul, mais à l'avantage de “marcher” systématiquement ou presque. Elle permet, de plus, de déterminer toutes les racines qu'elles soient réelles ou non.

La méthode est basée sur la division du polynôme par un trinôme : $T(x) = x^2 - Sx + P$

On écrit : $P(x) = (x^2 - Sx + P)Q_{n-2}(x) + R(x)$

L'idée est de rechercher, non pas les racines de P(x), mais les valeurs de S et P qui annulent R(x), le reste, qui est un polynôme du premier degré.

En effet, si S et P annulent R(x) alors si α est racine de T(x), par suite, il est aussi racine de P(x).

Pourquoi S et P ?

T(x) = x^2-Sx+P = (x-α)(x-β) est un trinôme il accepte deux racines α et β qui vérifient :

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta \\ P = \alpha * \beta \end{cases}$$

A.ii. La méthode

On se donne S_0 et P_0 arbitraires, on calcule le reste R(x) puis on ajuste S et P en S_1, P_1 jusqu'à ce que l'on ait $Max(|S_{n+1} - S_n|, |P_{n+1} - P_n|) < \epsilon$ la précision souhaitée.

On retient alors S_{n+1} et P_{n+1} comme valeurs approchées de S et P.

Posons :

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

$$Q(x) = b_0x^{n-2} + b_1x^{n-3} + b_2x^{n-4} + \cdots + b_{n-3}x + b_{n-2}$$

$$R(x) = R_0x + R_1$$

En identifiant P(x) à T(x)*Q(x)+R(x) et ce quelque soit x, on obtient un système d'équations qui ne peut avoir de solution que si les termes de puissance égale sont égaux, c'est à dire que les coefficients du polynôme sont les mêmes des deux cotés de l'égalité.

Soit en développant :

Puissance	terme de P	terme de T(x)Q(x) + R(x)
x^n	a_0	b_0
x^{n-1}	a_1	$b_1 - Sb_0$
x^{n-2}	a_2	$b_2 - Sb_1 + Pb_0$
…	…	…
x^{n-k}	a_k	$b_k - Sb_{k-1} + Pb_{k-2}$
…	…	…
x^2	a_{n-2}	$b_{n-2} - Sb_{n-3} + Pb_{n-4}$
x	a_{n-1}	$R_0 - Sb_{n-2} + Pb_{n-3}$
cste	a_n	$R_1 + Pb_{n-1}$

Ce qui nous intéresse est de calculer les coefficients b_k il vient :

$b_0 = a_0$

$b_1 = a_1 + Sb_0$

$b_2 = a_2 + Sb_1 - Pb_0$

…

$b_k = a_k + Sb_{k-1} - Pb_{k-2}$

…

$R_0 = a_{n-1} + Sb_{n-2} - Pb_{n-3}$

$R_1 = a_n - Pb_{n-1}$

Afin de garder la même relation de récurrence tout au long du calcul, on pose :

$b_{n-1} = a_{n-1} + Sb_{n-2} - Pb_{n-3}$

$b_n = a_n + Sb_{n-1} - Pb_{n-2}$

Avec cette convention, le reste $R_0x + R_1$ s'écrit : $b_{n-1}(x-S) + b_n$, soit $R_1 = b_n - Sb_{n-1}$

Le reste de la division R(x) : $b_{n-1}(x-S) + b_n$ est fonction de S et de P. On pose :

$F(S,P) = b_{n-1}$ et $G(S,P) = b_n - Sb_{n-1}$

Si S et P sont les valeurs qui annulent R(x), alors on a simultanément :

$F(S,P) = 0$ et $G(S,P) = 0$

Afin de déterminer S et P, on utilise une méthode itérative dont le principe est le suivant :

On construit une suite S_n , P_n telle que :

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \text{ et } \lim_{n\to\infty} P_n = P$$

Au rang n de la suite, on connaît Sn et Pn, il est donc possible d'écrire :

$$S = S_n + \Delta S \text{ et } P = P_n + \Delta P$$

Où ΔS et ΔP sont respectivement l'erreur commise sur S et P au rang de la suite. On a donc :

$$0 = F(S_n + \Delta S, P_n + \Delta P)$$
$$0 = G(S_n + \Delta S, P_n + \Delta P)$$

Bien entendu ΔS et ΔP ne sont pas connus. La méthode consiste justement à essayer de les évaluer.

Exprimons F et G sous forme d'un développement limité que l'on tronque à l'ordre 1. Soit :

$$0 \approx F(S_n, P_n) + \frac{\partial F}{\partial S}\Delta S + \frac{\partial F}{\partial P}\Delta P$$

$$0 \approx G(S_n, P_n) + \frac{\partial G}{\partial S}\Delta S + \frac{\partial G}{\partial P}\Delta P$$

On réécrit les équations ci-dessus en les égalant à zéro. On commet, ce faisant, une erreur que l'on inclue dans les valeurs de ΔS et ΔP. On note ces valeurs approchées : $\widehat{\Delta S}$ et $\widehat{\Delta P}$. On peut, alors, écrire :

$$0 = F(S_n, P_n) + \frac{\partial F}{\partial S}\widehat{\Delta S} + \frac{\partial F}{\partial P}\widehat{\Delta P}$$

$$0 = G(S_n, P_n) + \frac{\partial G}{\partial S}\widehat{\Delta S} + \frac{\partial G}{\partial P}\widehat{\Delta P}$$

Ce système d'équation peut être mis sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial S} & \frac{\partial F}{\partial P} \\ \frac{\partial G}{\partial S} & \frac{\partial G}{\partial P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\Delta S} \\ \widehat{\Delta P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F(S_n, P_n) \\ -G(S_n, P_n) \end{bmatrix} \text{ Soit : } Ax = B$$

On peut, en utilisant la méthode de Cramer, déterminer $\widehat{\Delta S}$ et $\widehat{\Delta P}$:

$$\widehat{\Delta S} = \frac{det(A^1)}{det(A)} \text{ et } \widehat{\Delta P} = \frac{det(A^2)}{det(A)}$$

Avec :

$$det(A^1) = det\begin{pmatrix} -F(S_n, P_n) & \frac{\partial F}{\partial P} \\ -G(S_n, P_n) & \frac{\partial G}{\partial P} \end{pmatrix} \text{ et } \det(A^2) = det\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial S} & -F(S_n, P_n) \\ \frac{\partial G}{\partial S} & -F(S_n, P_n) \end{pmatrix}$$

Ce qui permet de calculer nouvelle valeur de S et de P :

$$S_{n+1} = S_n + \widehat{\Delta S} \text{ et } P_{n+1} = P_n + \widehat{\Delta P}$$

Toutefois, nous n'avons pas les valeurs numériques des dérivées partielles... Il nous faut donc calculer les valeurs de : $\frac{\partial F}{\partial S}$, $\frac{\partial F}{\partial P}$ $\frac{\partial G}{\partial S}$, $\frac{\partial G}{\partial P}$

➡ *Calcul de $\frac{\partial b_k}{\partial S}$ ce qui permettra d'évaluer :* $\frac{\partial F}{\partial S}$, $\frac{\partial G}{\partial S}$

$$\frac{\partial b_0}{\partial S} = \frac{\partial a_0}{\partial S} = 0$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial S} = \frac{\partial a_1}{\partial S} + S\frac{\partial b_0}{\partial S} + b_0\frac{\partial S}{\partial S} = b_0 \to c_0$$

$$\frac{\partial b_2}{\partial S} = \frac{\partial a_2}{\partial S} + S\frac{\partial b_1}{\partial S} + b_1\frac{\partial S}{\partial S} - P\frac{\partial b_0}{\partial S} - b_0\frac{\partial P}{\partial S} = S\frac{\partial b_1}{\partial S} + b_1 = b_1 + Sc_0 \to c_1$$

$$\frac{\partial b_3}{\partial S} = \frac{\partial a_3}{\partial S} + S\frac{\partial b_2}{\partial S} + b_2\frac{\partial S}{\partial S} - P\frac{\partial b_1}{\partial S} - b_1\frac{\partial P}{\partial S} = S\frac{\partial b_2}{\partial S} + b_2 - P\frac{\partial b_1}{\partial S} = b_2 + Sc_1 - Pc_0 \to c_2$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial b_k}{\partial S} = \frac{\partial a_k}{\partial S} + S\frac{\partial b_{k-1}}{\partial S} + b_{k-1}\frac{\partial S}{\partial S} - P\frac{\partial b_{k-2}}{\partial S} - b_{k-2}\frac{\partial P}{\partial S} = b_{k-1} + Sc_{k-2} - Pc_{k-3} \to c_{k-1}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial b_{n-1}}{\partial S} = \frac{\partial a_{n-1}}{\partial S} + S\frac{\partial b_{n-2}}{\partial S} + b_{n-2}\frac{\partial S}{\partial S} - P\frac{\partial b_{n-3}}{\partial S} - b_{n-3}\frac{\partial P}{\partial S} = b_{n-2} + Sc_{n-3} - Pc_{n-4} \to c_{n-2}$$

$$\frac{\partial b_n}{\partial S} = \frac{\partial a_n}{\partial S} + S\frac{\partial b_{n-1}}{\partial S} + b_{n-1}\frac{\partial S}{\partial S} - P\frac{\partial b_{n-2}}{\partial S} - b_{n-2}\frac{\partial P}{\partial S} = b_{n-1} + Sc_{n-2} - Pc_{n-3} \to c_{n-1}$$

De manière générale, on constate qu'il s'agit d'appliquer une nouvelle division par T(x) et que l'on a :

$$\frac{\partial b_k}{\partial S} = c_{k-1}$$

Comme G(S,P) = b_n - Sb_{n-1} il vient :

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{\partial b_n}{\partial S} - S\frac{\partial b_{n-1}}{\partial S} - b_{n-1} = c_{n-1} - Sc_{n-2} - b_{n-1}$$

Afin d'éviter ce terme b_{n-1}, on calcule le terme $\frac{\partial b_n}{\partial S}$ en lui retranchant le terme b_{n-1} soit :

$$\frac{\partial b_n}{\partial S} = Sc_{n-2} - Pc_{n-3} \rightarrow c_{n-1}$$

Le terme b_{n-1} étant inclus déjà retranché on alors : $\frac{\partial G}{\partial S} = c_{n-1} - Sc_{n-2}$ ce qui simplifiera les calculs ultérieurs.

➡ *Calcul de $\frac{\partial b_k}{\partial P}$ ce qui permet d'évaluer : $\frac{\partial F}{\partial P}$, $\frac{\partial G}{\partial P}$*

$\frac{\partial b_0}{\partial P} = \frac{\partial a_0}{\partial P} = 0$

$\frac{\partial b_1}{\partial P} = \frac{\partial a_1}{\partial P} + S\frac{\partial b_0}{\partial P} + b_0\frac{\partial S}{\partial P} = 0$

$\frac{\partial b_2}{\partial P} = \frac{\partial a_2}{\partial P} + S\frac{\partial b_1}{\partial P} + b_1\frac{\partial S}{\partial P} - P\frac{\partial b_0}{\partial P} - b_0\frac{\partial P}{\partial P} = -b_0 \rightarrow -c_0$

$\frac{\partial b_3}{\partial P} = \frac{\partial a_3}{\partial P} + S\frac{\partial b_2}{\partial P} + b_2\frac{\partial S}{\partial P} - P\frac{\partial b_1}{\partial P} - b_1\frac{\partial P}{\partial P} = -Sc_0 - b_1 \rightarrow -c_1$

$\frac{\partial b_4}{\partial P} = \frac{\partial a_4}{\partial P} + S\frac{\partial b_3}{\partial P} + b_3\frac{\partial S}{\partial P} - P\frac{\partial b_2}{\partial P} - b_2\frac{\partial P}{\partial P} = -Sc_1 - b_2 + Pb_0 \rightarrow -c_2$

$\vdots$

$\frac{\partial b_k}{\partial P} = \frac{\partial a_k}{\partial P} + S\frac{\partial b_{k-1}}{\partial P} + b_{k-1}\frac{\partial S}{\partial P} - P\frac{\partial b_{k-2}}{\partial P} - b_{k-2}\frac{\partial P}{\partial P} = -b_{k-2} - Sc_{k-3} + Pc_{k-4} \rightarrow -c_{k-2}$

$\vdots$

$\frac{\partial b_{n-1}}{\partial P} = \frac{\partial a_{n-1}}{\partial P} + S\frac{\partial b_{n-2}}{\partial P} + b_{n-2}\frac{\partial S}{\partial P} - P\frac{\partial b_{n-3}}{\partial P} - b_{n-3}\frac{\partial P}{\partial P} = -b_{n-3} - Sc_{n-4} + Pc_{n-5} \rightarrow -c_{n-3}$

$\frac{\partial b_n}{\partial P} = \frac{\partial a_n}{\partial P} + S\frac{\partial b_{n-1}}{\partial P} + b_{n-1}\frac{\partial S}{\partial P} - P\frac{\partial b_{n-2}}{\partial P} - b_{n-2}\frac{\partial P}{\partial P} = -b_{n-2} - Sc_{n-3} + Pc_{n-4} \rightarrow -c_{n-2}$

On a donc :

$$\frac{\partial b_k}{\partial P} = -c_{k-2}$$

D'où :

$$\frac{\partial F}{\partial P} = \frac{\partial b_{n-1}}{\partial P} = -c_{n-3} \text{ et } \frac{\partial G}{\partial P} = \frac{\partial b_n}{\partial P} - S\frac{\partial b_{n-1}}{\partial P} - b_{n-1}\frac{\partial S}{\partial P} = -c_{n-2} + Sc_{n-3}$$

Le calcul des déterminant donne :

$$det(A^1) = b_{n-1}c_{n-2} - b_nc_{n-3}$$
$$det(A^2) = b_{n-1}c_{n-1} - b_nc_{n-2}$$
$$det(A) = c_{n-1}c_{n-3} - c_{n-2}^2$$

Ce qui permet d'exprimer :

$$\widehat{\Delta S} = \frac{b_{n-1}c_{n-2} - b_nc_{n-3}}{c_{n-1}c_{n-3} - c_{n-2}^2} \text{ et } \widehat{\Delta P} = \frac{b_{n-1}c_{n-1} - b_nc_{n-2}}{c_{n-1}c_{n-3} - c_{n-2}^2}$$

➡ *En résumé*

1. On choisit arbitrairement des valeurs pour S et P.
2. On calcule les b_k et les c_k (**attention !** il n'y a pas de c_n et c_{n-1} est calculé sans b_{n-1})
3. On calcule $\widehat{\Delta S}$ et $\widehat{\Delta P}$.
4. Si $\widehat{\Delta S}$ et $\widehat{\Delta P}$ sont suffisamment petits on arrête le processus, sinon on calcule les nouvelles valeurs pour S et P : $S = S + \widehat{\Delta S}$ et $P = P + \widehat{\Delta P}$ et on reprend au point 2
5. On détermine les racines de T(x), ce qui donne deux racines de P(x)

➡ *Remarque : la méthode est lourde en calculs et lente (50 itérations sont parfois nécessaires !) On choisit donc une précision des calculs faibles, les racines étant affinées par d'autres méthodes.*

➡ *Le gros avantage est que cette méthode permet de trouver toutes les racines d'un polynôme qu'elles soient réelles ou complexes.*