Contrat de Confiance TD

Exercice I

Soit le support numérique :

x	0	1	2	3
F(x)	-3	-1,5	2	7,5

- Quel est le degré du polynôme d'interpolation passant par ces points ?
- Donnez l'expression de $\Phi(x)$
- A l'aide des méthodes de Lagrange et d'Horner déterminez les coefficients du polynôme d'interpolation.
- Calculez la somme des coefficients de Lagrange.

Exercice II

Soit $P_3(x)$ un polynôme de degré 3 s'exprimant : $P_3(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. Dans ce qui suit, tous les calculs seront menés à l'aide de la méthode d'Horner.

- Déterminez les coefficients du polynôme quotient Q(x) résultat de la division de $P_3(x)$ par x-2.
- Donnez la valeur du reste de la division de $P_3(x)$ par x-2.
- Calculez la valeur de Q(x) en x=3. À l'aide de ce résultat et sans calculer directement $P_3(x)$ en x=3, donnez la valeur de $P_3(x)$ en x=3.

Exercice III

Dans ce qui suit, tous les calculs seront menés à l'aide de la méthode d'Horner. Soit le polynôme : $P(x) = x^3-13x+12$.

- Calculez la valeur de P'(x) en x=1. Donnez alors l'expression du polynôme $Q_1(x)=P(x)/(x-1)$. Donnez la valeur du reste de la division.
- Calculez l'expression de $Q_3(x) = P(x)/(x-3)$, de $Q_{-4}(x) = P(x)/(x+4)$. Donnez dans chaque cas la valeur du reste de la division.
- Proposez à partir des résultats des questions précédentes, une écriture de P(x) en fonction de ses racines sous la forme : $P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)$. Justifiez votre réponse.

Exercice IV

Soit le support numérique :

Xi	-1	0	2	3
F(Xi) =Yi	11	7	5	7

- Quel est le degré du polynôme d'interpolation passant par ces points ?
- Déterminez la valeur en x=1 que prend le polynôme d'interpolation en utilisant la méthode de Lagrange.
- Que vaut la somme des coefficients de Lagrange ?
- La valeur théorique est Y=5 pour X=1. Quelle conjecture peut on faire quant à la nature de la fonction F(X) ?

Exercice V

On cherche à calculer la dérivée d'une fonction y = F(x) connue par ses points { {0 , -2}, {1 , -1}, {2 , 2} }.

Pour évaluer la dérivée en ces points, on se propose d'interpoler par la méthode de Lagrange la fonction F, puis de dériver le polynôme obtenu.

- Donnez l'expression générale des coefficients de Lagrange. On donnera les deux formes vues en cours.
- Déterminez les coefficients des trois polynômes-coefficients de Lagrange

- Donnez l'expression littérale sous forme canonique décroissante du polynôme d'interpolation.
- Calculez la valeur de la dérivée aux points 0, 1 et 2 en utilisant la méthode de Horner

Exercice VI

Calculez la valeur prise par le polynôme $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ en $\alpha = 2$, ainsi que la valeur de la dérivée de ce même polynôme en ce même point par la méthode d'Hörner.

Exercice VII

Soit le support numérique :

X	0	1	2
Y=F(X)	Y_0	Y_1	Y_2

- Quel est le degré du polynôme d'interpolation passant par ces points ?
- Donnez l'expression littérale du polynôme d'interpolation en fonction de Y_0, Y_1 et Y_2.
- En intégrant le polynôme obtenu entre X=0 et X=2, exprimez la valeur de l'intégrale $I = \int_0^2 F(X)dX$ en fonction de Y_0, Y_1 et Y_2.

Exercice VIII

Soit $P_5(x)$ un polynôme de degré 5 s'exprimant : $P_5(x) = x^5 - x^4 - 13x^3 + 13x^2 + 36x - 36$

- Calculez en utilisant le schéma de Horner la valeur $P_5(2)$.
- Déterminez le polynôme quotient $Q_3(x)$ résultant de la division de $P_5(x)$ par $T(x) = x^2-9$: $P_5(x) = T(x)Q_3(x)+R(x)$.
  Pour ce faire vous rechercherez les racines évidentes de T(x) après l'avoir factorisé puis utiliserez la méthode d'Horner pour réaliser les deux divisions.
  Au vu des résultats de vos calculs vous expliquerez pourquoi cette méthode est ici possible.
  Donnez l'expression du reste R(x).
- Calculez la valeur de Q(x),T(x) et R(x) en x=2.
- Retrouvez la valeur de $P_5(x)$ en x=2 à l'aide des valeurs calculées précédemment.

Exercice IX

On considère l'équation différentielle : $\frac{dy(x)}{dx} = x - 2y$

- Calculez les valeurs prises par la fonction y(x) en x = {1, 2, 3} en utilisant la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 vue en TD. On prendra un pas d'intégration h = 1 et les conditions initiales { $x_0 = 0$; $y_0 = 1$ }.

Exercice X

On veut calculer la surface sous la courbe connue par le tableau de points suivant.

X	0	1	4	5
Y	2	-1	2	27

- Donnez une approximation de cette surface en utilisant la méthode des trapèzes.
- Expliquez pourquoi on ne peut utiliser la méthode des trapèzes à pas constant pour calculer cette surface.
- Utilisez la méthode de Lagrange pour rendre le calcul de cette intégrale par la méthode des trapèzes à pas constant possible.
- Donnez alors une approximation de la surface en utilisant la méthode des trapèzes à pas constant.
- Comparez et commentez les deux résultats trouvés.

Exercice XI

On cherche à déterminer avec une précision de 1e-6 la racine de l'équation $Log_e(x)-1 = 0$. Pour ce faire on envisage d'utiliser la méthode de Newton. On indique que le logarithme utilisé est le logarithme base e.

- Etablissez l'expression de la relation de récurrence reliant deux approximations successives
- Calculez une valeur approchée de la racine avec 6 décimales en prenant comme point de départ : x_0 : 2.

Exercice XII

Une mesure de courant en fonction du temps a donné le tableau de valeurs suivants :

t (s)	0	1	2	3
I (mA)	20	8	4	2

Afin déterminer avec précision l'instant où le courant devient égal à 6mA, vous procéderez de la manière décrite ci-après.

- Déterminez l'ensemble des coefficients de l'expression canonique décroissante du polynôme d'interpolation $P_L(t) = I(t)$ en utilisant la méthode de Lagrange.
- On cherche t tel que : $I(t) = 6$. Dans cette équation remplacez $I(t)$ par $P_L(t)$. Donnez l'expression de l'équation alors obtenue.
- En utilisant les méthodes d'Horner et de Newton, déterminez la valeur qui vérifie l'équation obtenue à la question 2. Vous donnerez une valeur approchée de la racine avec une précision meilleure que 10^{-2}. Le point de départ sera pris égal à 1. Les calculs seront menés avec une précision de 4 décimales.

Exercice XIII

On considère l'équation différentielle suivante : $i'(t) = \frac{1}{\tau}(1 - i(t))$. On précise : $\tau = 0,5$, et à $t = 0$, $i(t) = 0$.

- Donnez la valeur du courant $i(t)$ à $t = 0,1$; 0,2 ; 0,3 secondes en utilisant une méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 vue en TD et en utilisant un pas d'intégration égal à 0,1.

Exercice XIV

Soit $P_3(x)$ un polynôme de degré 3 s'exprimant : $P_3(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

- Déterminez une racine du polynôme par la méthode de Newton en prenant comme point de départ x = 2.
- Même question en prenant comme point de départ x =1,25.

La précision des calculs sera d'au moins 4 décimales. Tous les calculs polynomiaux seront menés à l'aide de la méthode de Horner. La solution sera donnée avec une précision meilleure que 10^{-2}.

Exercice XV

Soit le support numérique :

Xi	-1	0	1	2	3
Yi	6	1	-2	-3	-2

- Quel est le degré du polynôme d'interpolation passant par ces points ?
- Calculez la valeur que prend le polynôme d'interpolation en x=2 par la méthode de Lagrange en utilisant la méthode du tableau vue en TD. Pour ce calcul **on ne prendra pas** le point {2, -3} dans le tableau de données ci-dessus (colonne grisée).
- Déterminez les coefficients du polynôme d'interpolation $P_L(x)$ en utilisant la méthode de Lagrange.

Exercice XVI

L'algorithme d'Héron d'Alexandrie permet d'extraire la racine carrée d'un nombre par une méthode itérative. En utilisant la méthode de Newton (racine d'une équation), établissez cette méthode itérative.

Indication : l'équation dont on cherche la racine est g(x) - A = 0 où A est le nombre dont on cherche la racine carrée et g(x) la fonction qui à x associe x^2.

- Déterminez la racine carrée de 2 avec une précision meilleure que 10^{-4} en prenant comme point de départ $x_0 = 1$.

Exercice XVII

On considère l'équation différentielle suivante : $\dfrac{dg(x)}{dx} = 6x + 2$

- Calculez les valeurs prises par la fonction g(x) en x = {0, 1, 2}. On prendra h = 1 et les conditions initiales { $x_0 = -1$; $y_0 = -1$ } en utilisant la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 vue en TD.

Exercice XVIII

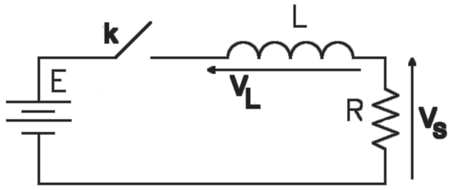
Nota Bene : tous les calculs de cet exercice se feront avec exactement 4 chiffres significatifs.

Un circuit à composant actif a une réponse en courant pouvant être approchée par l'expression suivante $i(v) = 10(1 - exp(-4v))$, on cherche à déterminer son point de fonctionnement en déterminant le point d'intersection avec la droite de charge : $i(v) = 10 - v$

- En écrivant l'égalité des courants, donnez l'expression de l'équation à résoudre.
- Résolvez cette équation par la méthode de Newton en prenant comme point de départ v = 0,6 V. La solution doit être donnée avec une précision de 0,01V.

Exercice XIX

Nota Bene : tous les calculs de cet exercice se feront avec exactement 4 chiffres significatifs.



À l'instant t = 0, on ferme l'interrupteur k. À cet instant le courant dans le circuit est nul.

- Donnez la relation liant le courant i(t) à Vs(t) aux bornes de la résistance R.
- Donnez la tension Vs(t) aux temps 2.10^{-3}, 4.10^{-3}, 6.10^{-3} s en utilisant la méthode de Runge Kutta d'ordre 2 vue en TD après mise en forme de l'équation différentielle $\dfrac{di(t)}{dt} = \ldots$et détermination des conditions initiales.

Le pas d'intégration h sera pris égal à 2.10^{-3} s.

On donne l'équation différentielle gouvernant le circuit : $E = L\dfrac{di}{dt} + Ri(t)$

On donne R = 10 Ω ; L = 0,1H ; E = 10V.

Exercice XX

Soit le support numérique suivant :

X	-2	0	2	4	6
Y	0,25	1	4	16	64

- Calculez la valeur que prend le polynôme d'interpolation en α=1 par la méthode de Lagrange en utilisant le tableau ci-dessus.
- La valeur trouvée vous semble-t-elle correcte ? Justifiez votre réponse.
- Les Y sont issus de la fonction $f(x) = 2^x$. Quelle méthode proposez-vous pour calculer une approximation exacte ? Faites le calcul et comparez alors la valeur trouvée avec la valeur de la fonction f(x) en x=1.

Exercice XXI

- Comment calcule-t-on x_{n+1} si l'on connaît x_n et que l'on recherche une valeur approchée d'α une racine de $f(x)$ par la méthode de Newton ?
- Donnez des critères nécessaires à la convergence de la méthode de Newton. Sont-ils numériquement exploitables ? Justifiez vos réponses.

Exercice XXII

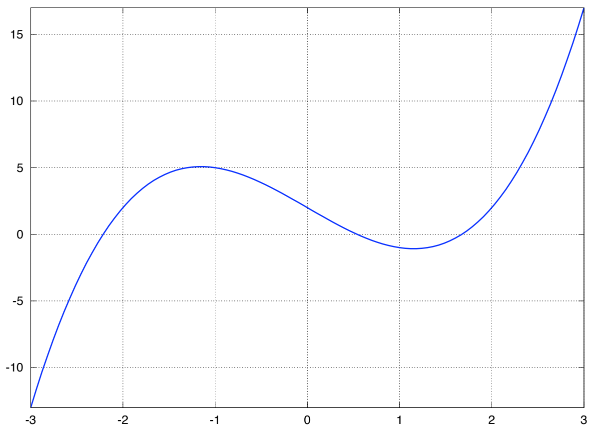
- Soit le vecteur float a[15] = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14};
  Définissez un pointeur L de type float pointant vers le 8ème élément de a.
- Que vaut alors L[0] ?
- Que vaut alors L[4] ?
- Que vaut alors *(L-5) ?
- Donnez la syntaxe de déclaration de variables structurées en vous aidant d'un exemple complet (déclaration de type incluse).
- Donnez la syntaxe générale de déclaration des fonctions, celle des prototypes, expliquez leur rôle.
- Précisez les endroits où il est possible de déclarer des variables, donnez leur portée dans chacun des cas.
- A quoi correspondent les paramètres d'une fonction ?
- Qu'entend-t-on par "passage par adresse ?"

Exercice XXIII

- Déclarez un type de variable susceptible de contenir 53 entiers.
- Déclarez une variable du type créé précédemment.
- À la déclaration, initialisez toute les éléments de la variable créée à zéro
- En utilisant le type défini au premier point, déclarez une matrice M de 10 colonnes par 53 lignes.
- Que contient l'élément M[10][48] ?
- Définissez une chaîne de caractères S pouvant contenir 16 caractères.
- En utilisant la fonction sprintf entrez la chaîne "Il est beau Coco" (espaces compris) dans la variable S.
- Affichez la longueur de la chaîne de caractères par deux méthodes différentes.

Exercice XXIV

On se propose de déterminer les racines du polynôme $P_3(x) = x^3 - 4x + 2$ que l'on a tracé sommairement ci-dessous. Donnez les racines avec une précision de 10^{-3} en utilisant la méthode de Newton. Pour chaque racine, choisissez une valeur de départ arrondie à 0,5 près. Pour chaque racine vous justifierez le choix du point de départ.



Exercice XXV

Soit le polynôme $P(x) = x^3 + x^2 - 14x - 24$. On se propose de déterminer toutes ses racines à l'aide de la méthode de Bairstow.

1. Déterminez les valeurs de S et P vers lesquelles converge la méthode de Bairstow pour le polynôme P(x) si l'on prend $S_0 = 1$, $P_0 = -7$. Donnez l'expression du polynôme quotient Q1.
2. Déterminez l'expression du quotient Q2(x) et du reste R(x) tel que l'on ait : $P(x) = (x^2 - 2x - 8)Q_2(x) + R(x)$.
3. À l'aide des deux premières questions et du schéma de Horner, factorisez P(x) sous la forme :
   $P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)$.
   Indication : On ne cherchera pas les racines de (x^2-Sx+P) que ce soit en question 1 ou 2

Exercice XXVI

On se propose d'évaluer l'intégrale $I = \int_0^{2,5} F(X)dX$. F(X) est connue par ses valeurs :

X	0	0,5	1	1,5	2	2,5
Y	-1	-0,9	0	4	15	38

- Peut-on calculez la valeur de l'intégrale par la méthode de Simpson ?
- Montrez qu'il est possible de calculer la valeur de l'intégrale I en combinant les méthodes des Trapèzes et de Simpson. Donnez les 3 solutions permettant d'utiliser la méthode de Simpson sur l'étendue la plus large possible
- Donnez les 3 approximations de l'intégrale I en utilisant chacune des 3 solutions proposées ci-dessus. Quelle est la meilleure approximation selon vous ? Justifiez votre réponse.

Exercice XXVII

Soit P(x) = x5 - 3x4 -5x3 + 15x2 + 4x -12.

- Ce polynôme a deux racines évidentes α1 et α2. Trouvez-les, puis, à partir de ces racines, déterminez S1 et P1 tels que l'on ait : P(x) = (x2 - S1*x + P1)*Q1(x).
- Déterminez les coefficients de Q1(x).
- Déterminez les racines de Q1(x) par la méthode de Bairstow en prenant {S=1, P=1}.
  Donnez tous les coefficients du polynôme quotient Q2(x).
- Déterminez, en utilisant les questions précédentes, toutes les racines de P(x).

Exercice XXVIII

- Soit le support numérique :

xi	-4	-2	0	2	4
yi=F(xi)	6	-6	-10	-6	6

- Quel est, a priori, le degré du polynôme d'interpolation passant par ces points ?
- Calculez la valeur en x=1 que prend le polynôme d'interpolation déterminé par la méthode de Newton.
- On sait par ailleurs que F(1) = -9. Comparez cette valeur avec celle que vous avez trouvé.
  Quelle conjecture pouvez-vous faire quant à la nature de la fonction F ?
  Aviez-vous une autre raison pour émettre cette hypothèse ?
- En supposant les conditions requises vérifiées, calculez à l'aide du tableau des différences la valeur de la fonction F(x) en x = 6.

Exercice XXIX

Soit le support numérique :

X	0	1	2	3
Y=F(X)	3	4	7	12

- Quel est le degré du polynôme d'interpolation passant par ces points ?
- F(X) est une fonction polynomiale. A l'aide du tableau des différences déterminez son degré.
- Déterminez la valeur de tous les coefficients de la forme canonique croissante du polynôme d'interpolation exprimé en variable réduite u.
- En remplaçant la variable réduite par son expression, déterminez l'expression du polynôme d'interpolation. On donnera la valeur de tous les coefficients de sa forme canonique décroissante.

Exercice XXX

En utilisant la méthode de Taylor à l'ordre 2, résolvez l'équation différentielle y'=x*y.

- Donnez la relation permettant de calculer y_{k+1} à partir de y_k , x_k et h.
- En utilisant les conditions initiales $x_0=0$, $y(x_0)=0$ et un pas d'intégration h égal à 1, calculez la valeur de y(4).
- En utilisant les conditions initiales $x_0=0$, $y(x_0)=1$ et un pas d'intégration h égal à 1, calculez la valeur de y(2).

Exercice XXXI

En utilisant la méthode de Taylor à l'ordre 2, résolvez l'équation différentielle y'=3x-1.

- Donnez la relation permettant de calculer y_{k+1} à partir de y_k , x_k et h.
- En utilisant les conditions initiales $x_0=1$, $y(x_0)=1$ et un pas d'intégration h égal à 1, calculez la valeur de y(4).

Exercice XXXII

En utilisant la méthode d'Euler corrigée, déterminez y(0,2) sachant que le fonction y vérifie l'équation différentielle : $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{x^2}{2}$.

- On pendra comme conditions initiales y(0)=0 et un pas d'intégration égal à 0,1. La précision de l'affinage sera pris égal à 10^{-3}. A chaque calcul on calculera la solution Euler, puis l'affinage.
- Justifiez le fait que l'affinage ne comportera ici qu'un seul calcul, et ce quelque soit la précision attendue.

Exercice XXXIII

En utilisant la méthode d'Euler corrigée, déterminez y(1) sachant que le fonction y(x) vérifie l'équation différentielle : $\frac{dy}{dx} = 1 - y^2$.

- On pendra comme conditions initiales y(0)=1 et un pas d'intégration égal à 1. La précision de l'affinage sera pris égal à 10^{-3}. A chaque calcul on calculera la solution Euler, puis l'affinage.
- Même question mais avec un pas d'intégration égal à 0,5.

En utilisant la méthode de Taylor à l'ordre 2, calculez y(1) en prenant les mêmes conditions qu'au point 1.

- Que pouvez-vous conjecturer quand à la solution de cette équation différentielle avec ces conditions initiales ?