De manière générale, il est fortement conseillé de venir en TD avec une calculatrice

TD#01

Exercice 1 : *Calcul polynomial*

1. Calculez : $P_6(1,5)$ avec $P_6(x) = 7x^6 + 4x^5 + 6x^4 - 3x^3 + 2x^1 - 9$
2. Ecrivez un programme en langage C permettant le calcul de la valeur prise par un polynôme en un point α sans utiliser de tableau pour le calcul. Les coefficients de P(x) et le point α seront saisis au clavier.

Exercice 2 : *Division polynomiale*

1. Déterminez l'expression du polynôme quotient $Q(x) = P_6(x) / (x-1,5)$ où $P_6(x)$ est le polynôme donné ci-dessus.
2. Pouvez-vous donner dès à présent le reste ?
3. Écrivez un programme en langage C calculant les coefficients de Q(x), le polynôme quotient, tel que : $P(x) = (x-\alpha)Q(x) + R$. Les coefficients de P(x) et le point α seront saisis au clavier.

Exercice 3 : *Dérivées d'un polynôme*

Soit P(x) un polynôme de degré 3.

1. Ecrivez P(x) en notation canonique décroissante.
2. Exprimez P(x) en fonction de $P_1(x) = P(x) / (x - \alpha)$. Le reste de la division sera appelé R_1, les coefficients de P_1 seront notés b_k
3. Exprimez $P_1(x)$ en fonction de $P_2(x)= P_1(x) / (x - \alpha)$. Le reste de la division sera appelé R_2, les coefficients de P_2 seront notés c_k.
4. Exprimez alors P(x) en fonction de $P_2(x)$, $(x-\alpha)$ R_1 et R_2.
5. Exprimez R_2 en fonction des autres termes de l'égalité obtenue ci-dessus.
6. Que vaut R_2 si l'on fait tendre x vers α ?
7. Exprimez $P_2(x)$ en fonction de $P_3(x)= P_2(x)/(x - \alpha)$. Combien de coefficients à $P_3(x)$? Comment le noteriez-vous ?
8. Le reste de la division de $P_3(x)$ par $(x - \alpha)$ étant noté R_3, exprimez P(x) en fonction de $(x - \alpha)$ et des restes R_1, R_2 et R_3.
9. Donnez l'expression générale du développement limité en série de Taylor d'une fonction quelconque.
10. Donnez alors l'expression du dL de Taylor dans le cas où la fonction est un polynôme de degré 3.
11. Déterminez une relation liant les coefficients de Taylor aux restes obtenus.
12. Généralisez la relation trouvée précédemment à un polynôme de degré n.

Exercice 4 : *généralisation du calcul des dérivées successives*

1. Calculez les dérivées successives de $P_6(x)$ en α = 1. Donnez le tableau complet
2. Ecrivez programme C qui calcule toutes les dérivées successives d'un polynôme P(x) sans utiliser de tableau à deux dimensions. Les coefficients de P(x) et α seront saisis au clavier.

TD#02

Exercice 5 : *Lagrange : Méthode du tableau*

Soit le tableau de données suivant :

X_i	0	2	4	5	6
Y_i	exp(0)	exp(2)	exp(4)	exp(5)	exp(6)

où exp est la fonction exponentielle (base e).

1. Calculez par interpolation linéaire la valeur de y pour α = 1 et comparer avec la valeur théorique.

2. Calculez par l'interpolation de Lagrange la valeur de F(1). Que constatez-vous ?
3. Proposez une méthode pour corriger le problème.

Exercice 6 : *Lagrange : Méthode développée*

Soit le tableau de données suivant :

X_i	0	2	4	5	6
$F(x) = 3x^2+2=Y_i$	2	14	50	77	110

1. Calculer par interpolation linéaire la valeur de y pour α = 1 et comparer avec la valeur théorique obtenue en utilisant l'expression analytique de la fonction F(x).
2. Calculer par interpolation de Lagrange la valeur de y pour α = 1.

Exercice 7 : *Lagrange : Avec ϕ(x)*

Soit le support numérique :

X	0	1	2	3
$Y = x^2-x+1$	1	1	3	7

1. Calculer Φ(x)
2. À l'aide de la méthode d'Horner, calculez les $L_k(x)$
3. Déterminez alors l'expression littérale de $P_n(x)$

Exercice 8 : *(travail personnel : attention c'est balèze !)*

- Ecrivez un programme en langage C qui détermine l'expression littérale (et non la valeur) du polynôme d'interpolation si on lui donne l'expression de $\Phi(x)$ et les points x_k, y_k.

Exercice 9 : *Vu en TP…*

- Ecrivez un programme en C qui calcule la **valeur** du polynôme d'interpolation en un point α par la méthode de Lagrange. *On prendra soin à ne pas stocker les coefficients de Lagrange dans un tableau.*

  Utilisez l'expression des coefficients de Lagrange $L_i = \prod_{j=0}^{n} \frac{\alpha - x_j}{x_i - x_j}$ pour ce programme et non Φ(x).

TD#03

Exercice 10 : *Newton : Interpolation polynomiale*

Soient les données suivantes : $x_0 = 0$, h = 0,1, n = 6, les $y_i=f(x_i)$ sont dans la liste suivante :

0 5,734 11,537 17,458 23,578 30,0 36,87

1. Construisez le tableau des différences
2. Calculez la variable réduite *u* pour α = 0,25
3. Calculez par interpolation la valeur de f(0,25)

Exercice 11 : *Newton : Utilisation du tableau des différences*

Soit le support numérique : $x_0 = -3$, h = 1, n = 6, les $y_k=f(x_k)$ sont dans la liste suivante :

Y_k : 20 16 8 2 4 20 56

1. Construisez le tableau des différences
2. À la vue du tableau des différences, quel conjecture pouvez-vous faire sur f(x) ?
3. Calculez la variable réduite *u* pour α = 0,5
4. Calculez par interpolation la valeur de f(0,5)
5. À partir du tableau des différences, calculez f(-4) et f(4).

Exercice 12 : *Programme interpolation de Newton - Travail personnel, cf. le projet de TP.*

- Ecrivez un programme C qui calcule le tableau de différences, l'affiche à l'écran et calcule la valeur du polynôme d'interpolation par le méthode de Newton en un point alpha donné.
- Les données pour le programme seront saisies au clavier.

Exercice 13 : *Recherche de racines : la méthode de Newton*

- En supposant que l'on connaisse x_n, une approximation de α, racine de la fonction $f(x)$, exprimez $\hat{h}$, l'erreur estimée en fonction de x_n, en utilisant le développement limité de $f(x)$ tronqué à l'ordre 1.

Exercice 14 : *Recherche de racines par Newton*

- Calculez, par une méthode itérative, une racine de l'équation : cos(x) = x, où x, en radians, est dans l'intervalle [0,5 ; 1]. On prendra comme valeur de départ 0,7. On arrêtera le processus lorsque l'erreur sera inférieure à 10^{-5}.

Exercice 15 : *Méthodes de Newton : les limites de la méthode.*

1. Déterminez les racines de $P(x) = x^4-2x^2+1$ en prenant comme point de départ $x_0 = 0$
2. Même question avec le polynôme $x^3-6x^2+4*x+4$, en prenant comme point de départ 0,5 puis 0,6. Calculez les deux premières itérations.

TD#04

Exercice 16 : *Méthode de Bairstow*

- En utilisant Bairstow, déterminez les racines de $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. On prendra $S_0 = P_0 = 1$ et $\varepsilon=10^{-2}$

Exercice 17 : *Bairstow, vitesse de convergence*

1. En utilisant Bairstow, déterminez les racines de $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. On prendra $S_0 = P_0 = 0$ et $\varepsilon=10^{-2}$
2. Que constatez-vous pour les valeurs finales de S et P ?
3. Qu'en déduisez-vous concernant le choix de S_0 et P_0 ?

Exercice 18 : *Bairstow : choix du point de départ*

1. En utilisant Bairstow, déterminez les racines de $P(x) = x^6 + 1$. On prendra $S_0 = P_0 = 0$ et $\varepsilon=10^{-2}$
2. Quel est le meilleur choix pour les valeurs de S_0 et P_0 ?

Exercice 19 : *Bairstow : programme C*

- Ecrivez un programme en langage C qui, utilisant la méthode de Bairstow, détermine **un** jeu de valeurs de S et P (sans calculer les racines, ni chercher à déterminer tous les couples de S et P).

Exercice 20 : *Méthode de Dichotomie*

- Trouvez la racine du polynôme $P_4(x) = 2x^4-6*x^3+7x-1$ comprise dans l'intervalle [0 ; 0,25] avec une précision de 10^{-2} en utilisant l'algorithme de la dichotomie

Exercice 21 : *Limites de la méthode de dichotomie*

1. Déterminez la valeur d'une racine du polynôme : $x^4-12x^3+54x^2-108x+81$ dans l'intervalle [2,5 ; 3,5] par la méthode de Dichotomie.
2. Vérifiez que 3 est racine à l'aide de la méthode d'Horner.

Exercice 22 : *Dichotomie : programme (se référer au cours…)*

- Ecrivez un programme en langage C qui détermine une racine d'une fonction F(x) par Dichotomie.
- La fonction F(x) sera définie dans une fonction C par : double F(double x).
- La précision sera définie dans une constante en début de programme égale à 10^{-3}.

TD#05

Exercice 23 : *Intégration numérique*

- Retrouvez l'expression dite de "Simpson" permettant le calcul d'une intégrale. On utilisera la détermination du polynôme d'interpolation par la méthode de Lagrange en variable réduite : $u = \frac{x-x_i}{h}$

Exercice 24 : *Intégration numérique comment mener un calcul*

- Estimez en utilisant la méthode des trapèzes et la méthode de Simpson l'intégrale : $I = \int_0^4 f(x)dx$

On donne :

X_i	0	1	2	3	4
Y_i	1	2	3	4	5

Exercice 25 : *Intégration : précision des méthodes.*

- Estimez en utilisant la méthode des trapèzes et la méthode de Simpson l'intégrale : $I = \int_0^4 f(x)dx$

On donne :

X_i	0	1	2	3	4
Y_i	1	2	5	10	17

Exercice 26 : *Intégration : précision des méthodes.*

- Estimez en utilisant la méthode des trapèzes et la méthode de Simpson l'intégrale : $I = \int_0^4 f(x)dx$

On donne :

X_i	0	1	2	3	4
Y_i	1	2	17	82	257

Exercice 27 : *Intégration programme C*

- Ecrivez un programme en langage C calculant la valeur d'un intégrale par la méthode d'intégration des trapèzes ou de Simpson. Le choix de la méthode sera saisi par l'utilisateur à l'aide d'un caractère : 't' ou 'T' pour Trapèzes, 's' ou 'S' pour Simpson.
  Le programme devra choisir la méthode des trapèzes si la méthode de Simpson n'est pas applicable.
  Toutes les données seront saisies au clavier.

Exercice 28 : *Dérivation numérique avec une fenêtre de 4 points.*

- Retrouvez l'expression de la formule à gauche pour une fenêtre de 4 points.

On donne le tableau de points suivant :

X_i	1	2	3	4
Y_i	0,000	0,693	1,099	1,386

- Calculez la dérivée en chacun des points du tableau en justifiant le choix de l'expression utilisée.

Note : la fonction est Ln(x)

Exercice 29 : *Dérivation numérique avec une fenêtre à 4 points d'un polynôme.*

On donne le tableau de points suivant :

X_i	1	2	3	4
Y_i	3	10	29	66

- Calculez les dérivées de chacun des points en utilisant les expressions des dérivées.

Note : la fonction est $x^3 + 2$

Exercice 30 : *Dérivation numérique programme C (Travail personnel)*

- Ecrivez un programme en langage C calculant la dérivée d'une fonction connue d'après ses points en mettant en œuvre une fenêtre à trois points.

TD#06

Exercice 31 : *Equation différentielle simple, méthode de Taylor.*

1. Calculez la valeur que prend g(x) en x = {2, 3, 4 } sachant que g(x) vérifie l'équation différentielle : y' = x en utilisant la méthode de Taylor. On précise les C.I. : $x_0 = 1$ et $y_0 = 2$ et le pas d'intégration h = 1.
2. Vérifiez les valeurs trouvées en intégrant l'équation différentielle.

Exercice 32 : *Equation différentielle un peu moins simple, méthode de Taylor.*

1. Calculez la valeur de g(x) en x = 0,3 sachant que g(x) vérifie l'équation différentielle y' = x + y. Les conditions initiales sont $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Les calculs seront arrondis à la quatrième décimale. Vous utiliserez la méthode de Taylor. Le pas h sera d'abord pris égal à 0,3 puis à 0,1
2. Vérifiez les valeurs trouvées en intégrant l'équation différentielle

Exercice 33 : *Equation différentielle simple, méthode Runge-Kutta*

- Calculez la valeur que prend g(x) en x = {2, 3, 4} sachant que g(x) vérifie l'équation différentielle : y' = x en utilisant une méthode de Runge Kutta d'ordre 2.
  On précise les conditions initiales : $x_0 = 1$ et $y_0 = 2$ et le pas d'intégration h = 1.

Exercice 34 : *Equation différentielle un peu moins simple, méthode de Runge-Kutta.*

- Calculez la valeur de g(x) en x = 0,3 sachant que g(x) vérifie l'équation différentielle y' = x + y. Les conditions initiales sont $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Les calculs seront arrondis à la quatrième décimale. Vous utiliserez une méthode de Runge-Kutta d'ordre 2. Le pas h sera d'abord pris égal à 0,3 puis à 0,1.

Exercice 35 : *Equations différentielle : RK2 programme C.*

- Ecrivez un programme en C calculant numériquement les solutions de l'équation différentielle de l'exercice 36. L'équation et le calcul des k_i seront codés dans des fonctions différentes.

Exercice 36 : *Equation différentielle simple, méthode d'Euler*

- Calculez la valeur que prend g(x) en x = {2, 3, 4 } sachant que g(x) vérifie l'équation différentielle : y' = x en utilisant la méthode d'Euler.
  On précise les conditions initiales : $x_0 = 1$ et $y_0 = 2$ et le pas d'intégration h = 1.

Exercice 37 : *Méthode d'Euler itérative (ou corrigée)*

- Calculez la valeur de g(x) en x = {2} sachant que g(x) vérifie l'équation différentielle : y' = x. Les conditions initiales sont $x_0 = 1$ et $y_0 = 2$.
  Vous utiliserez la méthode d'Euler corrigée.
  Le pas sera pris égal à 1 et la précision ε égale à 0,1.